Educación y Sociedad
ISSN: 1811- 9034 RNPS: 2073
Vol. 19, No.1 Enero-Abril de 2021

La formación integral de los estudiantes universitarios mediante el estudio de las ecuaciones diferenciales

The comprehensive training of university students through differential equation learning

Juan Antonio Martín-Alfonso
jmartin@unica.cu
https://orcid.org/0000-0003-3146-699X
José Antonio García-Rodríguez
joseagr@unica.cu
https://orcid.org/0000-0002-2497-0015
Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez, Cuba.

Resumen

En la asignatura Matemática para las carreras con perfiles de ciencia y técnica, se incluye el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden y su aplicación a la solución de ejercicios y problemas, contenido de enseñanza con elevadas exigencias para el aprendizaje de los estudiantes por cuanto deben integrar varios sistemas de conocimientos y habilidades estudiados con antelación. Es objetivo de este ensayo valorar didácticamente las potencialidades del estudio de las ecuaciones diferenciales para la formación integral de los futuros profesionales de las ciencias. El enfoque se sustenta en la perspectiva de la enseñanza por problemas y la aplicación integrada de habilidades matemáticas generalizadas; se ofrecen ejemplos y reflexiones teórico-metodológicas orientadoras.

Palabras clave: enseñanza, formación profesional, matemática

Abstract

In the subject Mathematics for the majors of science and technique profiles, the study of ordinary differential equations of the first and second order and their application to the solution of exercises and problems is included, which is a teaching content with high demands for the learning of the students as they must integrate various systems of knowledge and skills studied in advance. The objective of this essay is to didactically assess the potentialities of the study of differential equations for the comprehensive training of future science professionals. The approach is based on the perspective of problem teaching and the integrated application of

Ensayo científico, resultado del trabajo científico-metodológico.
Recibido: 15 de julio de 2020. Aprobado: 6 de noviembre de 2020. Publicado: 12 de noviembre de 2020

generalized mathematical skills. Guiding theoretical-methodological reflections and examples are offered.

Keywords: mathematics, professional training, teaching

Introducción

Un problema fundamental de la pedagogía en nuestros días es la unidad indisoluble entre los aspectos educativos e instructivos y el vínculo del estudio y el trabajo, que tienen como propósito el desarrollo de una personalidad capaz de favorecer el progreso social e individual.

La educación superior cubana está enfrascada en mantener su modelo de universidad moderna, humanista, universalizada, científica, tecnológica, innovadora, integrada a la sociedad y profundamente comprometida con la construcción de un socialismo próspero y sostenible. Uno de los retos para el logro de lo anterior, es contar con diseños curriculares pertinentes que propicien un incremento continuo de la calidad y la eficacia en la formación profesional de los egresados. Esto constituye uno de los fundamentos en el diseño de los planes de estudio E, al prever la formación integral y humanista, mediante la integración entre las actividades académicas, laborales e investigativas, lo que plantea un reto metodológico en el desarrollo de los fundamentos que garanticen que los egresados posean una sólida cultura político ideológica y social humanística y elevadas competencias para defender la Revolución con las ideas y cumplir cualquier tarea.

La pedagogía cubana cuenta con experiencias, sustentadas en el pensamiento de Martí que insistió en el carácter humanista de la educación. El Ministro de Educación Superior en 2016 convocaba a que:

> En todas las clases, en todas las disciplinas debemos realizar un sostenido y profundo trabajo metodológico que nos permita descubrir la lección humana presente en cada tema, y de una manera, convincente y amena, compartirla con nuestros estudiantes para que al final lo mejor prevalezca sobre lo peor. (Saborido, 2016, p. 9)

La Matemática está presente en el currículo de todas las carreras universitarias con amplias potencialidades para contribuir a estos propósitos y son bien conocidas las dificultades que presentan algunos estudiantes en el proceso de aprendizaje. Entre las tendencias iberoamericanas en la Educación Matemática se reconoce la enseñanza por problemas y la conveniencia de potenciar la aplicación integrada de las habilidades matemáticas en la solución de ejercicios y problemas como posibles vías para contribuir a un mejor aprendizaje de los estudiantes.

Las Ecuaciones Diferenciales (ED) permiten modelar una amplia variedad de fenómenos, por lo que constituyen un contenido obligatorio en la disciplina Matemática de las carreras de perfiles de ciencia y técnica. En particular se estudian las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), así como su aplicación a la solución de ejercicios y problemas, contenido de elevadas exigencias para los estudiantes, pues deben integrar varios sistemas de conocimientos y habilidades ya estudiados. Es objetivo de este ensayo valorar didácticamente las potencialidades del estudio de las ecuaciones diferenciales para la formación integral de los futuros profesionales de las ciencias.

Desarrollo

La calidad se asume como la unidad dialéctica de la excelencia académica y la pertinencia. Se deben potenciar las disciplinas que tienen como centro al hombre y sus relaciones sociales y las restantes, tener salida social humanista, tratando de que los contenidos se nutran con elementos favorecedores de un proceso de enseñanza-aprendizaje que ofrezca la preparación al estudiante para comprender y transformar la sociedad con responsabilidad en su actuación y tener sólidas convicciones.

La universidad tiene entre sus objetivos formar la responsabilidad social del universitario lo cual implica dotar a los estudiantes de las herramientas necesarias para aprender a desarrollar plenamente sus propias capacidades con sentido de responsabilidad, “formar personas comprometidas con su entorno y con sus semejantes, desde el reconocimiento de que su acción como profesional no solo tiene repercusiones en su entorno más inmediato, sino que va mucho más allá en el espacio y el tiempo” (De la Calle, García y Giménez, 2007, p. 58).

El estudio de la Didáctica de la Matemática permite afirmar que una solución a esta problemática está en garantizar un proceso óptimo y racional a partir de la enseñanza de procedimientos generalizadores, integradores y actitudinales que permitan al educando continuar aprendiendo por sí mismo. Es compartida por numerosos especialistas la necesidad de utilizar el concepto de habilidad como criterio para dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje; los autores asumen que:

> No se puede separar el saber del saber hacer, porque saber es siempre saber hacer algo y no puede haber conocimientos sin habilidades, sin saber hacer. De lo dicho resulta claro que para precisar qué es saber hacer hay que determinar los tipos de habilidades gracias a las cuales funcionan o se manifiestan los conocimientos. (Campistrous, 1989, p. 5)

El criterio para la determinación del sistema de habilidades (generalidad y esencialidad) se infiere del siguiente planteamiento:

> El contenido que se debe asimilar no son los elementos específicos que se suceden unos a otros y que se van asimilando por separado, sino la esencia que está detrás de ellos. Son fenómenos específicos que en este caso sirven solo como un medio de asimilación; la esencia se conoce mediante el fenómeno. (Campistrous, 1989, p. 6)

Lo anterior encuentra sus fundamentos en la importancia de incluir en el contenido de la enseñanza la esencia de los fenómenos particulares: "la sustitución del procedimiento específico de la actividad cognoscitiva por generalizadores eleva sustancialmente el efecto de desarrollo de la enseñanza, coadyuva a la formación del pensamiento teórico" (Talízina, 1992p. 61).

Desde el punto de vista de la educación ciudadana se plantean alternativas que hagan que el estudiante aprecie el valor y contribución de la ciencia formal en la formación como ciudadano. La matemática tiene gran contribución a la formación como ciudadano, eleva sustancialmente el efecto de desarrollo de la enseñanza y el pensamiento teórico (Talízina, 1992). La matemática debe contribuir al desarrollo de la capacidad de utilizar conceptos para interpretar y comprender al mundo, "ya no es posible enseñar matemáticas como un conjunto de teorías rígidas, acabadas e incambiables" (Rodríguez, 2013, p.217).

Un resultado en el estudio de las habilidades matemáticas generalizadas (HMG), ha reconocido un procedimiento metodológico que contribuye al desarrollo de la HMG *resolver problemas matemáticos*, la cual se define como sigue: "Resolver problemas matemáticos es una Habilidad Matemática Generalizada que consiste en un proceso de búsqueda de procedimientos desconocidos para de una situación inicial conocida llegar a una situación final desconocida" (Arnaiz y García, 2014, p. 3).

La revisión de la literatura matemática que trata el contenido de las EDO y su aplicación, muestra que estas se presentan en diversos campos de las ciencias y la ingeniería, lo que se pone de manifiesto en varias carreras que se estudian en la Universidad de Ciego de Ávila.

Valiosas observaciones acerca de la enseñanza de las ED pueden encontrarse en la investigación de Moreno y Azcárate (2003), quienes descubren las limitaciones de los profesores y estudiantes al enfrentar el estudio de la temática, siendo relevante el limitado trabajo con la solución de problemas y el mecanicismo que se impregna al estudio de las ED. Estas manifestaciones también se dan en nuestro entorno; de acuerdo con nuestra experiencia en la impartición de estos contenidos, se considera que el trabajo del profesor en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática debe estar dirigido a motivar a los estudiantes a solucionar problemas de este tipo, preferiblemente vinculados a su perfil, ofreciéndoles las orientaciones e impulsos para que ellos transiten por las acciones y operaciones incluidas en el procedimiento correspondiente a la HMG resolver problemas matemáticos.

Al modelar la situación planteada en el problema los estudiantes habrán utilizado contenidos relativos a la ciencia o la rama del saber de que se trate, por lo que estará vinculando las materias y disciplinas. En la solución del modelo integrarán habilidades no solo matemáticas, sino también el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones, pues algunas de las ecuaciones o sistemas deben resolverse utilizando algún software existente. Luego de haber comprobado la solución matemática, debe hacerse una reflexión en función de la formación integral del estudiante al profundizar en la conveniencia de utilizar la ciencia y la técnica en favor de la preservación y mejoramiento de la vida en nuestro planeta.

En los siguientes ejemplos se ponen de manifiesto estas ideas. Debido al amplio campo de aplicación de las EDO se presentarán problemas que se modelan con ecuaciones de primer orden, por ser estos los que tienen mayores potencialidades para el trabajo educativo. Se comienza ilustrando la aplicación que tiene al modelado de fenómenos relacionados con la variación de una magnitud en el tiempo M(t), debido a la diferencia entre lo ganado y lo perdido, como se expresa en la ecuación (1).

$$\frac{dM}{dt} = Cantidad\,ganada\text{-}Cantidad\ perdida \qquad (1)$$

Esta relación permite modelar fenómenos aparentemente no relacionados, pero en esencia el que ocurre es el mismo; tienen amplias potencialidades para el trabajo educativo y deben ser abordados en las carreras donde se estudian las ED. El siguiente ejemplo tiene potencialidades para el trabajo en la educación ambiental de los estudiantes y en particular con la Tarea Vida que se desarrolla en nuestro país.

Supongamos que un nuevo pesticida se aplica a los campos y se deposita a través de un río en una presa con un volumen *V* de agua. Asumamos que el río recibe una cantidad constante de pesticida y que fluye a la presa con un ritmo constante *f*. Supongamos que el río tiene una concentración constante *p* del nuevo pesticida. Bajo el supuesto de que el agua de la presa está bien agitada y que la cantidad de agua que entra es igual a la que sale. Si $c(t)$ es la concentración de pesticida en el presa en el tiempo *t*, entonces el ritmo de cambio en la concentración de pesticida es igual a la cantidad que entra, menos la cantidad que sale, por lo que usando para $c(t)$ el modelo (1) y suponiendo que la presa estaba libre del pesticida, es decir $c(0) = 0$, resulta el problema

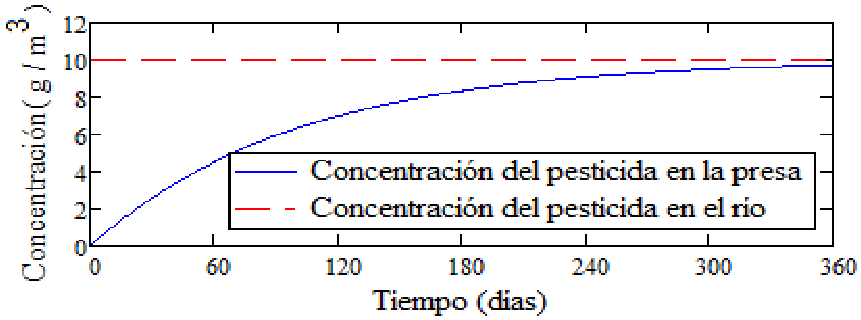
$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = \frac{f}{V}\, p - \frac{f}{V}\, c(t) \\ c(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Esta ecuación diferencial puede ser considerada como lineal de primer orden o de variables separables, siendo su solución $c(t) = \left[p - pe^{-f\,t/V}\right] = p\left[1 - e^{-f\,t/V}\right]$ y para agilizar su determinación es aconsejable el uso de un software para calcular la integral.

En la figura 1 se muestra el comportamiento del pesticida en una presa con un volumen de agua de 100000 m^3, donde el agua del río que la alimenta contiene 10 g/m^3 del pesticida y la velocidad con la que entre y sale el agua a la presa es de 1000 m^3 por día. Se evidencia que si $t \to \infty$ entonces $c(t) \to p$, es decir el nivel de contaminación de la presa y el río es el mismo.

Figura 1

Comportamiento de la concentración del pesticida en la presa.



Fuente: elaboración propia.

Se establecerá un debate con los estudiantes sobre la necesidad de proteger los recursos hídricos; las consecuencias para la salud del uso indiscriminado de pesticidas y productos químicos y por qué es tan importante fomentar la agricultura ecológica. Otra cuestión a debatir, es cómo en ocasiones hay que hacer simplificaciones para poder modelar un fenómeno, en este caso se asume que el agua fluye a la presa a un ritmo constante que coincide con el de salida, también se asume que la concentración del pesticida en el río es constante. Hay que argumentar cómo el acercamiento a la realidad hace más complejo el modelo y por tanto requiere de recursos matemáticos más potentes en la solución, tales como métodos numéricos.

También puede ser abordado el ejemplo que se discute en el artículo de Martín, Gómez, Valdés y Arza (2015) sobre la contaminación por monóxido de carbono contenido en el aire que penetra en una habitación cercana a una industria, ejemplo con amplias potencialidades para la educación ambiental.

Un problema análogo, que debe tratarse, es el referido a la absorción de drogas en órganos o células; donde el organismo humano, animal o una planta, se considera como una colección de compartimientos. Un compartimento puede ser un órgano (tal como el estómago, páncreas o hígado) o un grupo de células las cuales actúan como una unidad. Puede suceder que ciertas drogas fatales puedan acumularse en un órgano o un grupo de células, llevando finalmente a su destrucción. Se presenta el siguiente ejemplo ilustrativo:

Un líquido transporta una droga dentro de un órgano de volumen V cm^3 a una tasa de ***a*** cm^3/seg y sale a una tasa de ***b*** cm^3/seg. La concentración de la droga en el líquido que entra es **c** g/cm^3.

a) Escriba una ecuación diferencial para la concentración de la droga en el órgano en cualquier tiempo junto con las condiciones apropiadas.

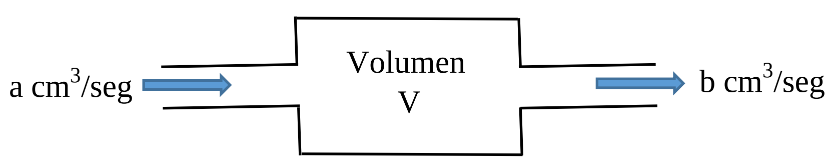
b) Resuelva la ecuación.

Solución (a) La situación está descrita esquemáticamente por la figura 2, la cual muestra un compartimento simple de volumen V, junto con la entrada y salida. Si x representa la concentración de la droga en el órgano (esto es, el número de gramos de la droga por cm^3). La tasa de cambio de la cantidad de droga en el órgano, teniendo en cuenta el modelo dado en (1) se expresa por

Figura 2

Representación de un órgano, como un compartimiento, al que está entrando y saliendo un líquido que contiene una droga.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ac}{V} - \frac{b}{V}x \qquad (3)$$



Fuente: elaboración propia.

Suponiendo que la concentración de la droga en el órgano en t = 0 es x_0, (b) la ecuación (3) puede tratarse como de variable separable o como una lineal de primer orden, de su solución general y aplicando las condición inicial x(0) = x_0 se obtiene que $x(t) = \frac{ac}{b} + \left(x_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-bt/V}$.

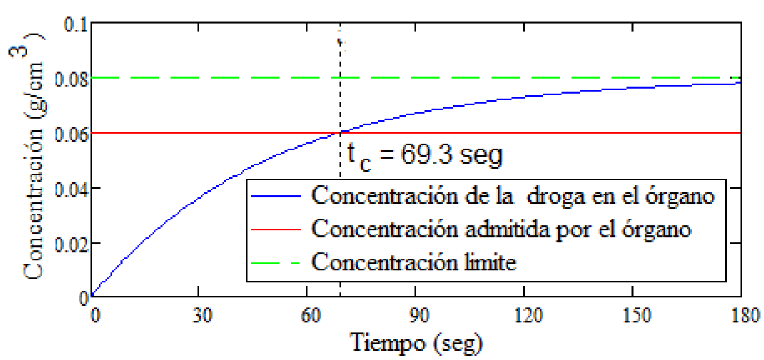
En Murray (1981), --de donde se ha tomado esta aplicación--, se presenta un grupo de casos particulares (deferentes valores de a, b, c y V) que pueden ser analizados con los estudiantes. En la discusión es muy importante destacar que existen drogas dañinas para el organismo y que en determinado tiempo de su uso pueden traer consecuencias fatales. En este análisis puede ser tomado el resultado que propone el ejercicio 1 de la sección B página 158 de este texto, donde se propone el caso de un órgano de volumen V que admite una concentración máxima c_{max} de una droga, que inicialmente no está presente y entra con una concentración mayor a este valor, transportada por un líquido que entra y sale a dicho órgano con la misma tasa b; entonces no debe permitirse la entrada de dicho líquido por un tiempo mayor a $t_c = \frac{b}{V} ln\left(c/(c - c_{max})\right)$.

Se puede considerar el caso particular de un órgano de V = 500 cm^3 que admite c_{max}= 0.06 g/cm^3 de una determinada droga, no presente al inicio. A dicho órgano está entrando un líquido con una concentración de 0.08 g/cm^3 de la droga a una tasa de 10 cm^3 /seg y sale a la misma tasa. Sustituyendo estos valores en (3) y en t_c obtenemos que: $x(t) = 0.08(1 - e^{-t/50})$ y $t_c = \frac{500}{10} \ln\left(0.08/(0.08 - 0.06)\right) = 50 \ln 4 \approx 69.3 \text{seg}$.

En la figura 3 se presenta dicho comportamiento, como puede apreciarse en poco tiempo la concentración de la droga en el órgano supera la admisible, por lo que se pueden sufrir daños irreparables. Esto debe aprovecharse para reforzar en los estudiantes lo dañino que es el consumo de drogas prohibidas, al igual que el uso de determinados medicamentos, sin la autorización médica.

Figura 3

Comportamiento de la concentración de la droga en él órgano.



Fuente: elaboración propia.

Como fue señalado, el modelo (1) se aplica a una amplia variedad de problemas. Seguidamente se considera uno de carácter económico. Una persona tiene una cantidad de dinero y lo pone en el banco ganando interés continuo del 4% anual y extrae 1000 pesos anuales; bajo estas condiciones el dinero se le agota a los 10 años. ¿Cuál era el capital inicial que tenía dicha persona? ¿Sin poner el capital inicial en el banco qué tiempo le hubiese durado usando los 1000 pesos anuales?

Si denotamos con A el capital en cualquier instante, entonces usando el modelo dado en (1) y denotando con A_0 el capital inicial, estamos ante el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = 0.04A - 1000 \\ A(0) = A_0 \end{cases} \tag{4}$$

El problema tiene como solución $A(t) = 25000 + (A_0 - 25000)\,e^{0.04t}$. Como el capital se agota en 10 años, entonces para calcular el valor de A_0 hay que solucionar la ecuación $25000 + (A_0 - 25000)\,e^{0.4} = 0$, su solución es A_0 =8241.9988 ≈ 8242 pesos. Si este capital inicial no se hubiese depositado en el banco ganando el interés continuo del 4% anual, entonces la persona solo pudiera disfrutar de su dinero por ocho años gastando 1000 pesos anuales, quedándole 242 pesos.

La solución de este ejemplo permite establecer un intercambio con los estudiantes donde se profundicen algunos aspectos del Programa Director Formación Económica, haciendo énfasis en la importancia de tener los recursos financieros en el banco ganando interés. Con estas aplicaciones económicas de las ED, es posible trabajar en la educación económica de los estudiantes, discutiendo con ellos sobre conceptos como oferta, demanda, estabilidad de precio, precio de equilibrio, entre otros.

Es importante destacar que los contenidos de la disciplina Matemática para la carrera de Licenciatura en Contabilidad y Finanzas no contempla el estudio de las ED. Los autores opinan que es una debilidad en el diseño curricular de esta carrera. Se sugiere que cuando se trabaje el Cálculo Integral para los estudiantes de contabilidad se vea, como una aplicación de este, la solución de ED de variables separables y lineales de primer orden, para así poder introducir esta tipología de problemas, que tienen un vínculo directo con el perfil de estos estudiantes. Esto puede ser profundizado con los estudiantes de alto aprovechamiento y usado en exámenes de premio.

Un modelo que también brinda posibilidades para trabajar en la formación de los estudiantes es la *Ley de enfriamiento de Newton*. Martín, Gómez, Valdés y Arza (2015) presentan un ejemplo basado en dicha ley que permite trabajar el tema de la caza indiscriminada de especies y otras temáticas referidas al cuidado de nuestra fauna. Como se ha señalado con anterioridad, una misma ED puede modelar fenómenos de diferente naturaleza; así por ejemplo la ecuación que modela la ley de enfriamiento de Newton y la que modela el aprendizaje de un estudiante son similares, este último fenómeno puede modelarse mediante

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \tag{5}$$

donde $P(t)$ mide el rendimiento del estudiante para adquirir una habilidad después de un tiempo de capacitación *t*, M es el nivel máximo de rendimiento y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión? Interprete el resultado.

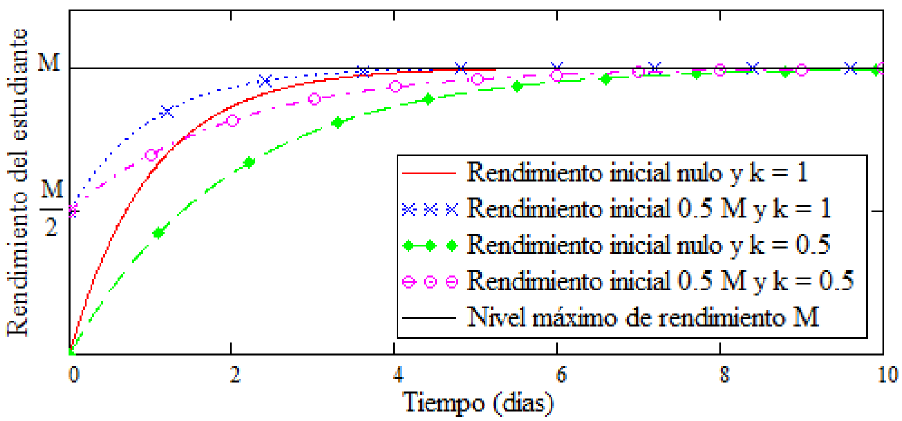
La solución general de esta ecuación es $P(t) = M + C\,e^{-k\,t}$, donde C es una constante arbitraria. Si en el momento inicial que comienza a medirse el rendimiento este es P_0, es decir, obtenemos la solución particular $P(t) = M + (P_0 - M)\,e^{-k\,t}$.

En la Figura 4 está representado el comportamiento de *P(t),* para diferentes valores del rendimiento inicial P_0 y diferentes valores k, constante relacionada con la rapidez con la que el estudiante varía su rendimiento.

Evidentemente si $t \to \infty$, $p(t) \to M$, lo que significa que en la medida que aumenta la capacitación, también aumenta el rendimiento, acercándose cada vez más al nivel máximo de este; y como se aprecia en la figura 4, independientemente del nivel inicial del rendimiento y de la rapidez con la que el estudiante adquiera la habilidad, si le dedica tiempo suficiente a la capacitación, entonces logrará el objetivo de alcanzar el máximo rendimiento. Es muy importante discutir estas ideas con los estudiantes para que comprendan la importancia del tiempo de estudio.

Figura 4

Rendimiento del estudiante, para diferentes valores de los parámetros.



Fuente: elaboración propia.

Un problema importante de biología y medicina trata de la ocurrencia, propagación y control de una enfermedad contagiosa, esto es, una enfermedad que puede transmitirse de un individuo a otro, fenómeno estudiado por la epidemiología; si un porcentaje grande de una población adquiere la enfermedad, se dice que hay una epidemia. Para presentar un modelo matemático sencillo para la propagación de una enfermedad, asumamos que tenemos una población grande, pero finita; supondremos que hay sólo dos tipos de individuos, unos que tienen la enfermedad contagiosa (llamados infectados) y otros que no tienen la enfermedad, (no infectados, pero que son capaces de adquirirla al primer contacto con uno infectado). Con estas suposiciones se puede modelar el fenómeno mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = k\,N_i(t)(N - N_i(t)) \qquad (6)$$

donde N denota el total de la población, $N_i(t)$ es el número de infestados en el instante t y k una constante de proporcionalidad denominada tasa específica de infección. Esta ecuación expresa que la tasa de cambio del número de infestados es proporcional al producto de la cantidad de individuos infestados por los no infestados. Veamos el siguiente ejemplo:

Los servicios de salud pública registran la difusión de una epidemia de gripe de duración particularmente larga en una ciudad de 500000 personas. Al inicio de la primera semana de registro se habían contabilizado 200 casos; durante la primera semana aparecieron 300 nuevos casos. Nos proponemos estimar el número de individuos infectados después de 6 semanas.

A partir de la ecuación (6) y con las condiciones dadas en el problema se formula

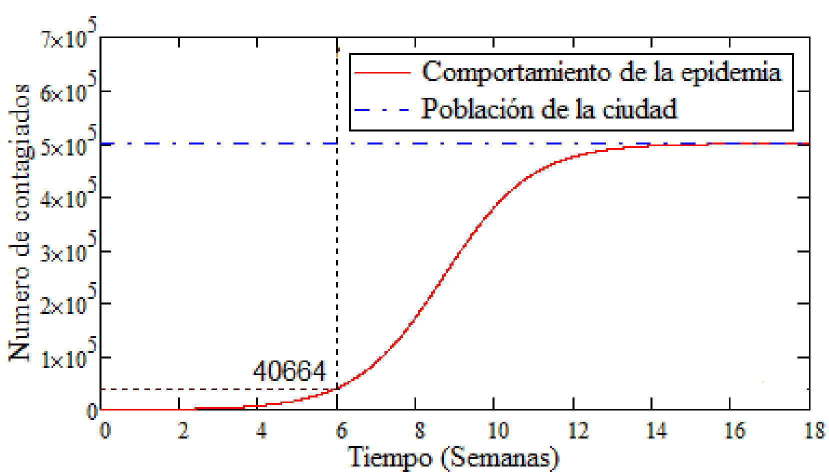
$$\begin{cases} \dfrac{dN_i}{dt} = k\,N_i(500000 - N_i) \\ N_i(0) = 200, \;\; N_i(1) = 500 \end{cases} \tag{7}$$

Esta ecuación de variables separables tiene la solución general $N_i(t) = 500000(1 + Ae^{-500000kt})^{-1}$. De la primera condición inicial resulta que *A=2449* y aplicando la segunda condición resulta que $k = -(ln\,\frac{999}{2449})/500000 \approx 0.000001793$. Finalmente, la cantidad de infestados por la epidemia de gripe viene dada por $N_i(t) = 500000(1 + 2449\,e^{-0.8965\,t})^{-1}$. Luego, a las seis semanas estarán infestadas $N_i(6) = 40664.13939 \approx 40664$ personas.

En la Figura 5 se representa el comportamiento de la epidemia, como se aprecia, transcurrido un tiempo suficientemente grande, la totalidad de la población estará contagiada con la gripe. En la vida real esto no acurre así pues se toman medidas higiénico-sanitarias para cortar la propagación de la epidemia, dentro de estas tenemos la aplicación de cuarentena a los contagiados y el aislamiento físico para evitar el contento entre los enfermos y los sanos.

Figura 5

Comportamiento de la epidemia de gripe.



Fuente: elaboración propia.

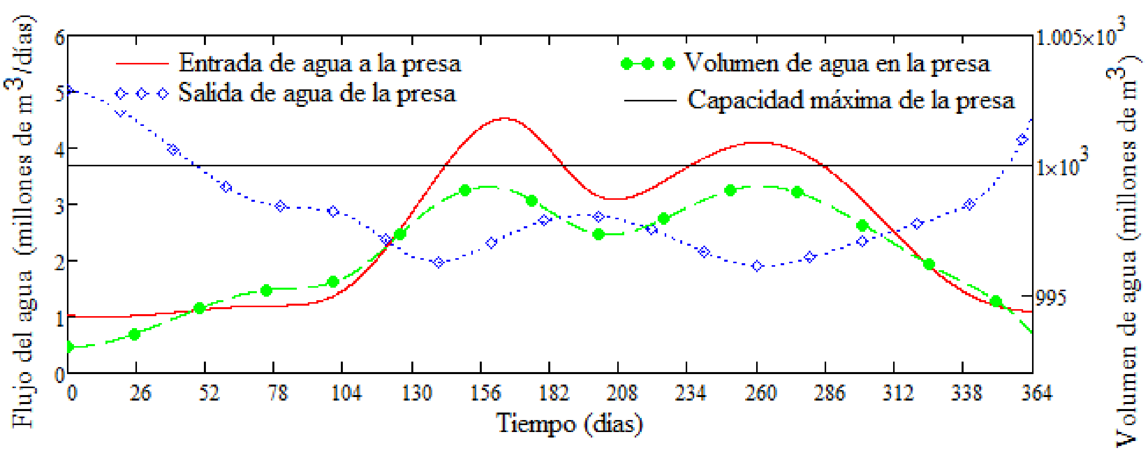
El modelo para la propagación de una epidemia donde se tiene en cuenta la cuarentena es más complicado, el mismo puede revisarse en el texto de Murray (1981). El modelo dado en (6) también puede ser utilizado para estudiar cómo se propaga un rumor o el conocimiento sobre una nueva tecnología en una población. Al discutirse este ejemplo con los estudiantes debe realizarse un debate donde se destaque la importancia del cumplimiento de las medidas higiénicas, sanitarias y orientaciones de la Defensa Civil y otras autoridades, cuando ocurren epidemias y otros fenómenos.

Por último, se presenta un ejemplo donde se ve la necesidad del uso de los métodos numéricos. Se retoma el primer ejemplo, donde se hicieron varias consideraciones para simplificar el modelo y poderle dar solución exacta. En un problema más real supondremos que los ritmos con que fluye y sale el agua de la presa son variables y diferentes; que por lo tanto el volumen de llenado de la presa es variable, además se considerará que la concentración del pesticida es variable.

En la figura 6 está representado el comportamiento que se ha asumido del agua en una presa con una capacidad máxima de 1000 millones de m^3. La curva del agua que fluye a la presa se propuso basado en el estudio realizado sobre la probabilidad de la lluvia diaria en el municipio de Ciego de Ávila (Brown, Díaz, Gallardo y Valero, 2017).

Figura 6

Comportamiento de la entrada y salida del agua a la presa y del volumen del agua.



Fuente: elaboración propia.

Las curvas de entrada y salida del agua de la presa se obtuvieron realizando un ajuste mediante Splines Cúbicos de los valores propuestos, los cuales se dan en la tabla 1. Ajuste que se encuentra implementado en Mathcad. De esta forma se definió la función

$$VolPresa(t) = 997 + fictEnt(t) - fictSal(t) \tag{8}$$

Tabla 1

Valores usados para realizar la interpolación mediante Spline Cúbico.

Días	**15**	**45**	**75**	**105**	**135**	**168**	**198**	**228**	**260**	**290**	**330**	**350**	**364**
Entrada de agua	1	1.1	1.2	1.5	3.2	4.5	3.2	3.5	4.1	3.5	1.7	1.2	1.1
Salida de agua	4.8	3.8	3	2.8	2	2.5	2.8	2.4	1.9	2.2	2.8	3.4	4.6

Nota: Los volúmenes de agua están dados en millones de m^3.

Fuente: elaboración propia.

En la figura 7 se presenta dicha implementación, donde N (cantidad de divisiones en el intervalo de trabajo) está asociado al error que se comete. En la figura 8 se ilustra la variación de la concentración del pesticida, dada en g/m^3, esta curva es el resultado de la solución numérica del problema de valores iníciales (10), se aprecia la influencia de los elementos variables antes mencionados dados en el problema.

Figura 7

Implementación en Mathcad de la solución del problema con condición inicial (10).

$$t0 := 0 \qquad c0 := 0 \qquad t1 := 364 \qquad N := 1 \times 10^3$$

$$f(t, c) := \frac{fitcEnt(t)}{VolPresa(t)} \cdot Pest(t) - \frac{c}{VolPresa(t)} \cdot fitcSal(t)$$

$$\text{Dado} \quad c'(t) = f(t, c(t)) \qquad c(t0) = c0$$

$$c := Odesolve(t, t1)$$

Fuente: elaboración propia.

En la figura 8 está representado el comportamiento de la concentración del pesticida que llega al río en g/m^3; teniendo en cuenta que los cultivos son diferentes en las distintas épocas del año y no todos requieren de la misma cantidad de pesticidas, se ha asumido que dicha concentración es variable y en este ejemplo consideramos que está dada por

$$Pest(t) = 210 - 2.8 \times 10^{-5} t\text{-}0.01t^2 + 2.49 \times 10^{-5} t^3 \qquad (9)$$

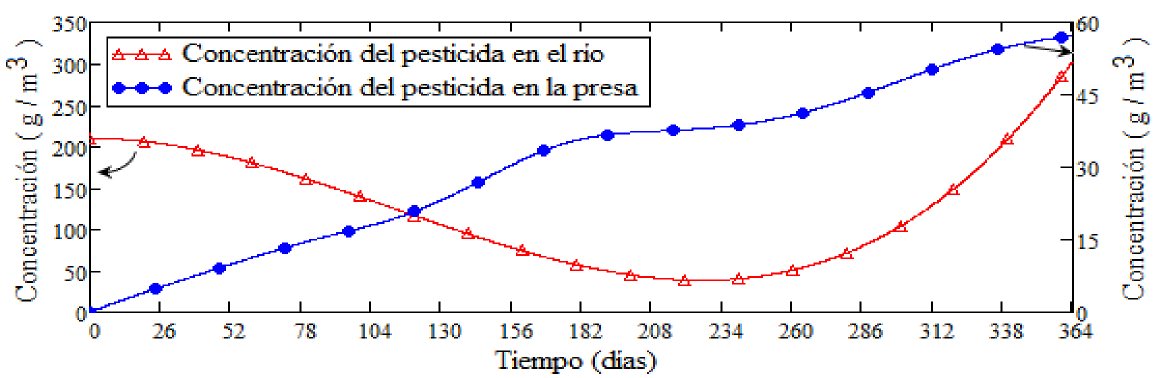
Bajo estas condiciones el modelo dado en el problema de valores iniciales (2) adopta la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dc(t)}{dt} = \dfrac{fictEnt(t)}{VolPresa(t)} Pest(t) - \dfrac{c(t)}{VolPresa(t)} fictSal(t) \\ c(0) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Ecuación con coeficientes variables que requiere solución numérica, la que se puede obtener usando asistentes matemáticos, por ejemplo, el Mathcad.

Figura 8

Representación de las concentraciones de pesticida en el agua del río y de la presa.



Fuente: elaboración propia.

Al discutir esta solución con los estudiantes, además de ver los elementos planteados cuando se presentó el problema con los parámetros constantes, hay que insistir en la importancia de los métodos numéricos y el empleo de softwares matemáticos para resolver modelos que se aproximen más a la realidad y así vean la necesidad del estudio de estas potentes herramientas.

Estos ejemplos y otros similares, han sido empleados sistemáticamente en las clases y han permitido establecer debates con los estudiantes que contribuyen a su formación integral. Esto requiere de una mayor preparación del docente tanto en los contenidos matemáticos como en los otros aspectos asociados al trabajo educativo y a la relación interdisciplinaria, entre otros aspectos necesarios para lograr las exigencias de los planes de estudio de las diferentes carreras.

Conclusiones

El presente artículo ilustra que el tema de EDO, en particular las ecuaciones de primer orden, tiene amplias posibilidades para trabajar en la formación integral de los estudiantes y lograr una mayor vinculación de este contenido con sus carreras, mostrando que la Matemática es una herramienta de gran utilidad práctica. Los ejemplos presentados abarcan varias de las aristas de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, pero se seleccionaron los de mayores potencialidades para el trabajo educativo, el éxito de la enseñanza está condicionado por el debate que logre establecerse con los estudiantes. Esta experiencia se ha desarrollado durante varios cursos por los autores en la impartición de estos contenidos, con una amplia aceptación por parte de los educandos, que reconocen la contribución que ha tenido en su formación integral.

Referencias bibliográficas

Arnaiz, I. y García, J. A. (2014). El desarrollo de habilidades matemáticas generalizadas. Las habilidades “resolver problemas matemáticos” y “demostrar proposiciones matemáticas”. *Educación y Sociedad*. *12*(4).

Brown, O., Díaz, R., Gallardo, Y. y Valero, J. (2017) Caracterización de precipitaciones diarias en el municipio de Ciego de Ávila, Cuba. *Ingeniería Hidráulica y Ambiental. XXXVIII* (2), 44-58.

Campistrous, L. (1989). Sobre las habilidades matemáticas. En: *Orientaciones Metodológicas. Matemática 10mo grado.* (5-7). Editorial Pueblo y Educación.

De la Calle, C., Moreno, J. A. y Giménez, P. (2007). La formación de la responsabilidad social en la universidad. *Revista Complutense de Educación. 18*(2), 47-66.

Martín, J. A., Gómez, A., Valdés, G. y Arza, J. (2015). Educación ambiental en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Experiencias con los estudiantes de informática. *Universidad&Ciencia*. *4*(2), 32-49.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de Matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza De Las Ciencias*. *21*(2), 265-280.

Murray, R. S. (1981). *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*. Applied Differential Equations, Prentice-Hall Inc.

Rodríguez, M. E. (2013). La educación matemática en la conformación del ciudadano. *TELOS. Revista de Estudios Interdisciplinarios en Ciencias Sociales*. *15* (2), 215-230.

Saborido, J. R. (2016). Discurso del Ministro de Educación Superior. Cuba. Material digitalizado.

Talízina, N. F. (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. Editorial Ángeles.