



El geogebra en el desarrollo de las habilidades de cálculo de áreas delimitadas por curvas

Geogebra in the development of skills for the calculation of areas delimited by curves

Osvaldo Amândio Wanga-Sachilepa
sachirondino@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-5087-7984>
Rosa Maria do Nascimento
rnascimento22@hotmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-7836-7441>
José Manuel-Gaio
josemanuelgaio1964@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2913-4291>
Escola Superior Pedagógica do Bié, Angola.

Resumen

El objetivo del artículo es exponer un proceder didáctico para la utilización del Geogebra para el cálculo de áreas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Se realizó un estudio con una población de 32 estudiantes de la 12ª clase de los cursos para técnicos en Electricidad y Construcción Civil del Instituto Medio Politécnico de Kamacupa, en la provincia de Bié, para utilizar el *software* Geogebra para calcular áreas delimitadas por curvas desde la teoría de formación por etapas de las acciones mentales. Se elaboró un *software* que facilita a los alumnos la creación de construcciones matemáticas modelos para la exploración interactiva y los cambios de parámetros, según las exigencias de cada situación. Esta herramienta también permite a los docentes crear páginas-web interactivas. Se utilizaron el método analítico-sintético de la investigación teórica y la sistematización teórica y práctica. Se diseñó y validó un curso mediante un estudio piloto.

Palabras clave: aprendizaje, enseñanza, Matemática, software

Abstract

The objective of the article is to present a didactic procedure for the use Geogebra for the calculation of areas in the teaching-learning process of Mathematics. A study of the 12ª class students of the Medio Politécnico Institute to use the software Geogebra to calculate areas



defined by curves in the courses of Electricity and Civil Construction from the theory of stages formation of mental actions. A software that facilitates the students the creation of mathematical constructions models for the interactive exploration and the changes of parameters, according to the demands of each situation was elaborated. This tool also allows teachers to create interactive webpages. The analytic-synthetic method of the theoretical investigation and the theoretical systematizing and practice were used. A course was designed and validated by means of a pilot study.

Keywords: learning, Mathematics, software, teaching

Introducción

En el mundo contemporáneo marcado por la globalización de la economía, las diferencias sociales y los problemas que estas engendran, provocan que los sistemas educativos no alcancen totalmente a los objetivos requeridos por la sociedad, de allí que, para muchos países, el cambio educativo sea una fuerte demanda.

Angola después de la conquista de la independencia nacional de 11 de noviembre de 1975 y de la paz efectiva el 4 de abril de 2002, se propuso la construcción de una sociedad más justa para el bien de todos. En este proceso la educación y la escuela como institución, desempeñan un papel determinante, ya que sobre ellas está la responsabilidad de la formación de las futuras generaciones de angolanos.

En este sentido la sociedad y las escuelas angolanas, están involucradas en importantes cambios en la formación de profesionales en correspondencia con la integración del conocimiento científico de la época contemporánea. El acelerado desarrollo de la ciencia y la tecnología y las exigencias de formación de las nuevas generaciones implica desafíos en la formación del profesional de las ciencias técnicas y a los docentes que los forman.

La escuela es una institución en que los alumnos desarrollan diversas capacidades matemáticas, construyendo conocimiento y desarrollando capacidades transversales, como el desarrollo del pensamiento lógico, las habilidades para la comunicación y la formulación resolución de problemas matemáticos (Barbosa, 2014).



Aprender Matemática no es solo aprender el lenguaje de esta ciencia, es también adquirir modos de actuación que posibiliten manejar otros conocimientos, que permitan resolver situaciones de la vida cotidiana o de determinada profesión con el objetivo de enfrentar problemas, tanto de forma individual como en colectivo (Moura, 2007).

En el proceso de formación de los técnicos en Electricidad y Construcción Civil del Instituto Medio Politécnico de Kamacupa, Bié, República de Angola, se constató que los alumnos de la 12^a clase presentan un insuficiente desarrollo de las habilidades de cálculo de superficies delimitadas por curvas, expresado en la limitada comprensión de las situaciones presentadas, no poder identificar con independencia las operaciones matemáticas a realizar y al aplicar las reglas de cálculo correspondientes.

La utilización de un software educativo posibilita a los alumnos una nueva visión de la Matemática. Les permite comprender la Matemática no solo como un instrumento de cálculo, sino como un medio eficaz para resolver problemas; el alumno se enfrenta a procesos de formulación, análisis, determinación de estrategias y comprobación de los resultados (Rosa y Martínez-Aznar, 2019; Rodríguez et al., 2020).

El objetivo de este artículo es elaborar un procedimiento didáctico para la utilización del Geogebra para el desarrollo de las habilidades de cálculo de áreas de superficies delimitadas por curvas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en estudiantes de ciencias técnicas del nivel medio superior en Angola.

Se realizó un estudio de la bibliografía especializada relacionada con las habilidades de cálculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con el método analítico-sintético de investigación teórica y la sistematización de la teoría y la práctica. Desde la perspectiva epistemológica y didáctica, la investigación se sustenta en ideas esenciales de la formación por etapas de las acciones mentales (Galperin, 1986) y la teoría de las habilidades matemáticas generalizadas (Campistrous y Rizo, 1996; Arnaiz, 2014). Los resultados se evaluaron mediante un estudio piloto con una muestra de 44 estudiantes de la 12^a clase del Instituto Medio Politécnico de Kamacupa en la provincia de Bié.



Desarrollo

Referentes conceptuales del desarrollo de habilidades de cálculo utilizando la integral definida

El desarrollo de las habilidades de cálculo tiene como uno de los propósitos principales contribuir a la preparación de los futuros profesionales para la vida laboral y social. La resolución de diversos problemas que conducen a determinar las áreas de curvas es de gran utilidad práctica en la ciencia y la técnica.

Los autores de este trabajo constataron en la práctica que los estudiantes de los cursos de Construcción Civil y Electricidad del Instituto Medio Politécnico de Kamacupa presentan limitaciones en el cálculo de áreas de superficies limitadas por curvas. Los profesores no disponen de materiales de apoyo suficientes para sistematizar las acciones y operaciones de la habilidad en referencia y resolver los problemas propios de la profesión para la que se están preparando.

La Matemática debe ser enseñada y aprendida no solo como meras operaciones de cálculos mecánicos, sino que exige del pensamiento lógico y divergente para resolver problemas complejos de la actividad científica y productiva. En la actualidad, con el desarrollo de las tecnologías de la información y de las ciencias informáticas, constituye una exigencia del proceso de formación de los profesionales el empleo de los recursos informáticos disponibles como herramientas que automatizan y facilitan la recogida de datos, su procesamiento y para realizar cálculos que pueden ser complejos y requerir de un tiempo prolongado. El empleo de distintos tipos de software constituye una necesidad en las condiciones contemporáneas para las distintas ciencias y su enseñanza-aprendizaje en la escuela.

La teoría de la formación por etapas de las acciones mentales Galperin (1986), permite estructurar el desarrollo de las acciones y las estructuras del pensamiento durante la formación de las operaciones mentales necesarias para la apropiación de los conceptos científicos en diferentes etapas de dominio de la acción.

El uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general y del cálculo en particular sustentada en la utilización del Geogebra, puede ser de gran utilidad para el cálculo de áreas delimitadas por curvas y es un medio que facilita la búsqueda de nuevos



conocimientos e informaciones en los ámbitos científicos y productivos. Las escuelas deben ser estimuladas a adoptar este recurso desde las primeras clases.

El uso del computador en el aula, es una herramienta de auxilio para la apropiación de conocimiento, desarrollo de las habilidades y del pensamiento lógico y matemático. También puede contribuir a desarrollar cualidades como la capacidad de concentración, la coordinación motora fina, la creatividad, la orientación espacial, entre otras. La informática constituye un instrumento interactivo que permite la interiorización de las acciones y operaciones por los estudiantes (Aguiar, 2016).

Para elevar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática deben emplearse métodos investigativos; para familiarizar a los estudiantes con las características de la actividad científica en la actualidad, este debe diseñar estrategias, buscar y procesar información, establecer hipótesis, contrastar métodos y alternativas para resolver los problemas que se le presentan, tanto en el aula como fuera de ella.

El contenido de enseñanza-aprendizaje de la Matemática está integrado por los conocimientos (conceptos, teoremas y procedimientos), las habilidades, hábitos, capacidades, experiencia transformadora (investigadora), valores, convicciones y normas de conducta (Arnaiz, 2014). El aprendizaje de la Matemática garantiza la apropiación por los estudiantes del contenido matemático y contribuye al desarrollo del pensamiento lógico y las cualidades de la personalidad.

Los autores de este trabajo constataron que las habilidades desde el punto de vista psicológico y didáctico han sido abordadas por diferentes investigadores. Entre las principales aportaciones se destacan (Talízina, 1988; Campistrous y Rizo, 1996; Álvarez, 1999; Bermúdez y Rebutillo (2003); Arnaiz, 2014; Brito, 2007; Montes, 2009; Ballester, 1916; Neres y Costa, 2018; Pérez, et al., 2018).

Se asume que las habilidades son modos de actuación que permiten operar con los conocimientos. Existe una relación dialéctica entre los conocimientos y las habilidades: los conocimientos se manifiestan en las acciones intelectuales y prácticas que se pueden ejecutar con ellos en la actividad.



Las habilidades, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, se han abordado por Campistrous y Rizo (1996); Arnaiz (2014); Blanco et al. (2015); Santos (2015); Díaz y Díaz (2018); Luna y Barros (2018); Rodríguez (2018); Saucedo et al. (2019) y Rodríguez et al. (2021). Según los autores consultados las habilidades se estructuran mediante acciones y operaciones y constituyen en su conjunto invariantes de la actividad psíquica. Se forman y desarrollan mediante las ejecuciones necesarias e imprescindibles que el estudiante debe conocer como un elemento metacognitivo (Díaz y Díaz, 2018) en el enfrentamiento a las tareas docentes en el proceso de aprendizaje.

En los trabajos de Blanco, et. al., (2015), Díaz y Díaz (2018), Luna y Barros (2018), Rodríguez, et. al (2021) se aborda la necesidad de comprender los problemas y ejercicios de cálculo que se presentan a los estudiantes, para lo que se hace necesario reformular y formular el enunciado de los mismos. A nuestro juicio esta acción de reformulación es importante para resolver problemas y ejercicios de cálculo en cualquiera de las áreas de la Matemática.

En investigaciones vinculadas con las habilidades de resolución de problemas de cálculo, se plantea que existen limitaciones en la comprensión de las relaciones entre las magnitudes presentes en las situaciones problémicas iniciales (Santos, 2015; Blanco, et. al., 2015; Díaz y Díaz, 2018).

Las habilidades matemáticas generalizadas son (Arnaiz, 2014): calcular, evaluar, simplificar, resolver ecuaciones, descomponer en factores y relacionar gráficos y propiedades de funciones. La habilidad calcular integra el cálculo con números, magnitudes, variables, radicales y el cálculo razones trigonométricas. El autor en referencia entiende la habilidad calcular como la operación o las operaciones que se realizan para conocer el resultado de la combinación de dos o más números, según reglas establecidas, es decir calcular es un proceso que, apoyado en definiciones de conceptos de operaciones, está dirigido a buscar un número o un representante de él.

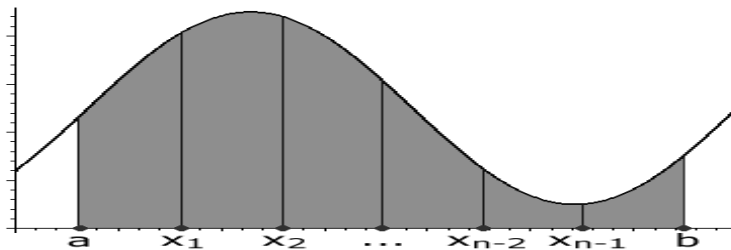
El cálculo diferencial e integral es un valioso instrumento para resolver problemas de la Mecánica, la Electrodinámica, la Astronomía y las ingenierías. Se hace necesario establecer primeramente algunos elementos básicos acerca de la interpretación geométrica de la integral definida y sus potencialidades para el cálculo de áreas delimitadas por curvas.



Supongamos que $y = f(x)$ sea una función continua y positiva en un intervalo cerrado $[a; b]$, si dividimos este intervalo en n sub-intervalos de longitudes iguales, o sea, de longitud $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$, de modo que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$. Sea x_j un punto cualquiera en el sub-intervalo, $k = 1, 2, \dots, n$. Construimos en cada sub-intervalo con base Δ_x y altura $f(x_j)$, conforme a la figura 1.

Figura 1.

Representación gráfica de la función $y = f(x)$



La suma de las áreas de los n intervalos construidos está dada por la sumatoria de las áreas de cada uno de ellos, es decir:

$$A_{\text{intervalos}} = \left[\sum_{j=1}^n f(x_j) \right] \Delta_x$$

Intuitivamente es posible admitir que en la medida que n crece, Δ_x disminuye y consecuentemente, la sumatoria anterior converge para el área A de la región limitada por el gráfico de f y por las rectas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Por tanto, el área de esta región está dada por:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^n f(x_j) \right] \Delta_x$$

Sin embargo, se conoce que el límite de la función es exactamente igual a la integral definida de la misma y esa integral definida de una función continua y positiva, para x variando de a hasta b ,



nos da el área de la región limitada por el gráfico de f , por el eje x y por las rectas $x = a$ y $x = b$.

Teorema fundamental: Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a; b]$ y $F'(x) = f(x)$, esto es, $F(x)$ es una primitiva o anti-derivada $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

En la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los cursos de Construcción Civil y Electricidad de los Institutos Medios Politécnicos en Angola, debe lograrse que los estudiantes se apropien de un determinado sistema de conocimientos matemáticos y desarrollen las habilidades necesarias para operar con ellos y darles aplicación en su perfil de formación profesional.

En este sentido tiene una significativa importancia la fijación de los conocimientos; el desarrollo de habilidades y capacidades tienen como base los conocimientos habilidades y capacidades adquiridos con anterioridad (Miniet et al., 2017). Este proceso de fijación es posible lograrlo mediante la solución de determinados tipos de ejercicios que permitan la adecuada sistematización de las acciones y operaciones necesarias para su dominio. En este trabajo se entiende por ejercicio una tarea que se le presenta al alumno en la cual debe realizar determinadas transformaciones para obtener el resultado, mediante la aplicación de estrategias, procedimientos y algoritmos conocidos (Rodríguez, 2018).

Galperin (1986), cuando analiza la actividad orientadora investigadora que despliega el sujeto para resolver problemas o ejercicios, señala un conjunto de fases (elementos). Los autores de este trabajo consideran importante tener en cuenta el proceso de regulación de la actividad del sujeto en el proceso de solución de problemas y ejercicios. Se revela en los trabajos de este autor, la necesidad del impulso que lleva a la acción en busca del objetivo trazado, a la hora de ejecutar este tipo de actividad. Considerando la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales del sujeto (Galperin, 1986), en la solución de los ejercicios de cálculo de áreas utilizando la integral definida, debe lograrse que los alumnos:

- Representen en forma material o materializada la situación presentada por medio de gráficos, esquemas o bocetos.



- Interioricen las relaciones presentes en la situación en el plano mental.
- Expresen de forma oral en qué consiste la situación presentada y sus exigencias.
- Seleccionen las estrategias y procedimientos necesarios para resolver el ejercicio.
- Ejecuten las estrategias y procedimientos seleccionados y los sistematicen.
- Comprueben el proceso y el resultado seguido.

Desde el punto de vista didáctico, los ejercicios de cálculo de áreas de superficie, utilizando la integral definida, cumplen los siguientes requisitos:

- El sujeto dispone de un algoritmo elaborado o analogía para resolverlos, debe utilizar los procedimientos gráficos, aritméticos, geométricos y de análisis y síntesis correspondientes.
- Los alumnos deben estar motivados, sentir deseos de resolver el ejercicio, percibir la importancia de lo que hace para la vida, la ciencia y el progreso social contemporáneo (contexto significativo).
- El alumno debe poseer los conocimientos, habilidades, hábitos, valores, para emprender la búsqueda y llegar al fin propuesto.
- El sujeto pone en tensión los esfuerzos intelectuales y volitivos, activa el pensamiento, demanda una intensa actividad cognoscitiva para encontrar o seleccionar los conocimientos y métodos necesarios que conduzcan al resultado del ejercicio.

A partir de los análisis anteriores los autores de este artículo establecen los diferentes casos particulares para resolver ejercicios sobre cálculo de áreas delimitadas por curvas:

- Identificar qué caso particular de cálculo de área se presenta. Representación e interpretación de datos y gráficos.
- Seleccionar el procedimiento o algoritmo a seguir según el caso presentado.
- Aplicar el procedimiento o algoritmo para resolver el caso identificado.
- Verificar el procedimiento y el resultado alcanzado.

El Geogebra para la solución de ejercicios de cálculo utilizando la integral definida



En la actualidad es necesaria la utilización de la informática como instrumento de trabajo en las más diversas esferas de actuación. La escuela debe disponer de los recursos existentes en la sociedad para preparar a los estudiantes de acuerdo a las exigencias del siglo XXI (Smolski, 2018).

El Geogebra es un software libre de Matemática dinámica, desarrollado para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática desde la enseñanza básica hasta la universitaria. Este software reúne recursos de geometría, álgebra, tabuladores, gráficos, probabilidades, estadística y cálculos simbólicos en un único ambiente. Tiene la ventaja didáctica de representar, al mismo tiempo y en un único ambiente visual, las características geométricas y algebraicas de un mismo objeto.

El Geogebra ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una vista gráfica, una numérica, una algebraica y además, una vista de cálculo. Esta multiplicidad de opciones permite apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (como es el caso de puntos, gráficos de funciones), algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones) y como área de cálculo.

El Geogebra al ser un *software* basado en la matemática dinámica, permite utilizar en la sala de clases las variantes de geometría, álgebra y cálculo. Esta herramienta fue creada por Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburg (Smolski, 2018). Este es el *software* utilizado en esta investigación, el mismo abarca contenidos de Geometría, Álgebra y Cálculo.

Con el *software* de la geometría dinámica se puede realizar gran cantidad de construcciones geométricas utilizando los íconos puntos, rectas, segmentos de rectas, polígonos, longitudes, circunferencias y cónicas. En la ventana de entrada se pueden insertar funciones y verificar sus gráficos; construir figuras geométricas en tres dimensiones, sin que estas pierdan sus propiedades. El *software*, a pesar de contener numerosos recursos, es de fácil comprensión y posee un tutorial de auxilio, es de libre acceso para cualquier persona.

Sistematización de un ejercicio de cálculo utilizando el software Geogebra

Ejercicio: Determinar el área de la función: $y = \frac{1}{3}x^2$



Sistema de operaciones que deben realizarse:

- Mostrar el programa y la tecla inicial.
 - Insertar la función en la parte de entrada: $y = \frac{1}{3}x^2$ y presionar *enter*.
 - Ahora clique en punto nuevo y a continuación clique en el punto $x = 0$, creando A (0, 0).
4. Ahora clique en punto nuevo y a continuación clique en el punto $x = 3$, creando B (3, 0).
 5. Clicar con el botón derecho del mouse en el punto A y pedir para renombrar el punto “A” para “a”.
 6. Clicar el botón derecho del mouse en el punto B y pedir para renombrar el punto “B” para “b”.
 7. En la caja de “entrada” digitar el comando: Integral [<Función>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]
 8. En el comando dado anteriormente, sustituir <Función> por f, <Valor de x Inicial> por x(a), <Valor de x Final> por x (b).
 9. Visualizar el comando Integral [f, x(a), x(b)] y presionar *enter*.
 10. Visualizar el área calculada.

La evaluación se realiza de forma continua mediante la observación de cómo los alumnos ejecutan las operaciones y la justificación de los pasos realizados para resolver la actividad. Para el diseño del gráfico se realizan preguntas como las siguientes:

- a) ¿El gráfico posee punto máximo o mínimo?
- b) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento?
- c) ¿La función posee punto de inflexión?
- d) Comprobar el proceso y el resultado.

Estas observaciones son importantes para que los estudiantes puedan relacionar la enseñanza de la Matemática y del cálculo de área con su actividad profesional.



Descripción de la metodología utilizada

Para el diseño del curso se establecieron los siguientes componentes:

Objetivo: calcular áreas de diferentes superficies delimitadas por curvas utilizando los conocimientos y las habilidades sobre la integral definida y como instrumento el *software* Geogebra.

Contenidos: Integral definida. Propiedades y aplicaciones. El *software* Geogebra.

Métodos: elaboración conjunta y trabajo independiente.

Medios: computadoras con el *software* Geogebra.

Formas organizativas: se utiliza como forma organizativa fundamental la clase en las variantes de tratamiento de nuevo contenido y prácticas. El curso tiene un total de 20 horas.

Sistema de ejercicios: se proponen diferentes ejercicios para calcular áreas delimitadas por curvas, los mismos se vinculan con la actividad profesional de los estudiantes. Se creó un manual para los estudiantes para las clases de nuevo contenido y para las aulas prácticas.

Para lograr los objetivos del curso se crearon las condiciones materiales y de disponibilidad de espacios para el desarrollo de las actividades docentes por parte de los profesores y estudiantes de la 12ª clase del Instituto Medio Politécnico de Kamacupa en la provincia de Bié. Constituyó una exigencia para la titulación, la asistencia al 75 % de las actividades presenciales. El curso se desarrolló los fines de semana y se logró la incorporación de miembros de la comunidad que se encuentra ubicada en una zona agrícola.

Se elaboró un manual para los estudiantes con los objetivos del curso, el tratamiento teórico del contenido relacionado con la integral definida y sus aplicaciones y un sistema de ejercicios y problemas sobre la aplicación de la integral definida al cálculo de áreas delimitadas por curvas según las especialidades de los técnicos de nivel medio en formación, este manual se utilizó como medio para el desarrollo de las actividades docentes y para el trabajo independiente de los participantes.

Se demostró en un estudio piloto la efectividad del curso y el proceder didáctico empleado para el desarrollo de las habilidades de cálculo de áreas delimitadas por curvas en los participantes. El



estudio consistió en aplicar una prueba de entrada y otra de salida a la muestra seleccionada sobre la resolución de ejercicios de cálculo de área de superficies utilizando la integral definida. En la prueba de entrada el 100 % de la muestra utilizó procedimientos de cálculo de la integral definida tradicionales (no emplearon ningún tipo de *software*) y solo un 40,6 % de la muestra aprobó sobre una escala ordinal de 20 valores. En la prueba de salida el 100 % de la muestra empleó el *software* Geogebra para el cálculo de la integral definida y se alcanzó un 81,2 % de resultados positivos sobre la misma escala de valores.

Conclusiones

El cálculo diferencial e integral es un valioso instrumento para resolver problemas de la Mecánica, la Electrodinámica, la Astronomía y las ingenierías. El cálculo de áreas delimitadas por curvas constituye una habilidad matemática generalizada que tiene relevante importancia para la formación de los profesionales de los institutos politécnicos en la República de Angola.

En el proceso de formación de los técnicos en Electricidad y Construcción Civil del Instituto Medio Politécnico de Kamacupa en la provincia de Bié, existe la problemática de que los alumnos de la 12^a clase presentan un insuficiente desarrollo de las habilidades de cálculo de superficies delimitadas por curvas, expresada en limitada comprensión de las situaciones presentadas, no pueden identificar con independencia las operaciones matemáticas a realizar y aplicar las reglas de cálculo correspondientes.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática el uso de las tecnologías en general, y del cálculo en particular, sustentada en la utilización del Geogebra, puede ser de gran utilidad para el cálculo de áreas delimitadas por curvas y es un medio que facilita la búsqueda de nuevos conocimientos e informaciones en los ámbitos científicos y productivos.

En este artículo se delimitan los casos particulares para resolver ejercicios sobre cálculo de áreas delimitadas por curvas, entre los que se encuentran la identificación de la situación de cálculo de área que se presenta y su comprensión, la selección del procedimiento o algoritmo a seguir según el caso presentado, la aplicación del procedimiento o algoritmo para resolver el caso identificado y la verificación del procedimiento y el resultado aplicando.



Se diseñó un curso para los estudiantes de la 12^a clase del Instituto Medio Politécnico de Kamacupa en la provincia de Bié con un total de 20 horas lectivas y se desarrolló a partir de la creación de un material didáctico y la creación de las condiciones necesarias desde el punto de vista material y organizacional, demostrándose en un estudio piloto su efectividad para el desarrollo de las habilidades de cálculo de áreas delimitadas por curvas en los participantes.

Referencias bibliográficas

- Aguiar, J. (2016). Software R: capacitação em análise estatística de dados utilizando um software livre. In: Seminário de Ensino, Pesquisa e Extensão (SEPE), Brasil.
- Arnaiz, I. (2014). *Didáctica de la Matemática*. Universidad de Ciego de Ávila. Inédito.
- Álvarez, M. (1999). *La escuela en la vida*. Editorial Pueblo y Educación.
- Ballester, S. (2016). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Editorial Pueblo y Educación.
- Barbosa, A. (2014). O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral [Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, Paraná].
- Bermúdez, R. y Rebastillo, M. (2003). *Teoría y metodología del aprendizaje*. Editorial Pueblo y Educación.
- Blanco, L. J., Cárdenas, J. A. y Caballero, A (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria*. Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura.
- Brito, H. (2007). *Psicología para Educadores*. Editorial Pueblo y Educación.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprender a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación.
- Díaz, J. A. y Díaz, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 57-74. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/19804415v32n60a03>



- Galperin, P. (1986): Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. En: *Antología de Psicología Pedagógica y de la Edades*. Editorial Pueblo y Educación.
- Pérez, N. P., Rivero, H., Ramos, J. M., Sifredo, C. y Moltó, E. (2018). *Didáctica de la Física*. Tomo I. Editorial Félix Varela.
- Montes, E. (2009). *La función educativa de la Matemática*. <http://www.monografias.com>
- Moura, M. (2007). *Matemática na infância. Educação Matemática na infância: abordagens e desafios*. Editorial Gailivro.
- Miniet, I, Vázquez, D. y Benítez, I. (2017). ¿Cómo motivar el estudio de las matemáticas con ejercicios diversos? *REDEL. Revista Granmense de Desarrollo Local*, 1(3), octubre-diciembre 2017.
- Neres, R. y Costa, V. (2018). Resolução de Problemas, segundo Pólya, para o ensino de probabilidade usando jogos de loteria. *Educ. Matem.*, 20(2), 369-390. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p369-390>
- Luna, R. y Barros, V. (2018). Resolução de Problemas, segundo Pólya, para o ensino de probabilidade usando jogos de loteria. *Educ. Matem.*, 20(2), 369-390.
- Talízina, N. (1988). Métodos para la creación de programas de enseñanza. Universidad de Camagüey.
- Rodríguez, L. E. (2018). Evaluación de cualidades del pensamiento de estudiantes de Matemática-Física al ingreso a la universidad. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 18(2), 1-23.
- Rodríguez, L. E., Pérez, Y. y Pérez, N. (2021). La habilidad para formular problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la solución de problemas de Física y de Matemática. *Luz*, XX (1), 40-54.
- Rosa, D. y Martínez-Aznar, M. M. (2019). Resolución de problemas abiertos en ecología para la ESO. *Enseñanza de las ciencias*, 37(2), 25-42. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2541>



- Santos, L. M. (2015). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 333-346.
- Saucedo, M., Espinosa, M. E. y Herrera, S. C. (2019). Método de Pólya aplicado al lenguaje algebraico en primer año de licenciatura. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 9(18), DOI: <http://dx.doi.org/10.23913/ride.v9i18.434>
- Smolski, F. (2018). Capacitação em análise estatística de dados utilizando o software livre. *Ciênc. Ext.* 14(3),123-134.