

El desarrollo de habilidades matemáticas generalizadas. Las habilidades “resolver problemas matemáticos” y “demostrar proposiciones matemáticas”

The development of generalized mathematical abilities. The abilities "to solve mathematical problems" and "to proof mathematical propositions"

Resultado de proyecto de investigación. Fecha de recibido: 9 de septiembre de 2014. Fecha de aprobado: 29 de octubre de 2014.

## **Autores:**

Ibrahim Arnaiz Barrios. Licenciado en Educación, especialidad Matemática. Profesor Titular de la Facultad de Ciencias Pedagógicas de la Universidad "Máximo Gómez Báez" de Ciego de Ávila y Doctor en Ciencias Pedagógicas (2003). Imparte docencia en la formación doctoral y en las maestrías en Ciencias de la Educación, es profesor del departamento de Ciencias Exactas. Investigador en Pedagogía y en la disciplina Didáctica de la Matemática durante más de 35 años. Ha participado en varios eventos científicos de carácter internacional y tiene varias publicaciones en Cuba y en el extranjero. Profesor adjunto del Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC). Ha impartido cursos de postgrado en Cuba, la República de Panamá y la República Bolivariana de Venezuela. Profesor y miembro del comité académico del programa de Maestría en Ciencias de la Educación Superior. Es miembro del Consejo Científico Territorial de Educación y de Tribunales de Categorías Docentes. E-mail: [ibrahima@ucp.ca.rimed.cu](mailto:ibrahima@ucp.ca.rimed.cu)

José Antonio García Rodríguez. Licenciado en Educación, especialidad Matemática. Profesor Auxiliar de la Facultad de Ciencias Pedagógicas de la Universidad "Máximo Gómez Báez" de Ciego de Ávila y Máster en Ciencias de la Educación Superior. Imparte docencia en las maestrías en Ciencias de la Educación, es profesor del departamento de Ciencias Exactas. Investigador en Dirección Científica y en la disciplina Didáctica de la Matemática durante más de 35 años. Ha participado en varios eventos científicos de carácter nacional e internacional y tiene varias publicaciones en Cuba y en el extranjero. Ha impartido cursos de postgrado en Cuba. Profesor y miembro del comité académico de un programa de Maestría. Es miembro del Consejo Científico Territorial de Educación y de Tribunales de Categorías Docentes. E-mail: [josea@ucp.ca.rimed.cu](mailto:josea@ucp.ca.rimed.cu)

## **Resumen**

El proceso investigativo en el proyecto "El perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y la Física" en la Universidad "Máximo Gómez Báez" de Ciego de Ávila ha permitido identificar la necesidad de definir el concepto de Habilidad Matemática Generalizada. Teniendo en cuenta la experiencia de los autores, los resultados investigativos en el tema, la revisión de textos de Matemática de la escuela cubana y el intercambio con varios docentes y metodólogos se presenta su definición, a partir de la cual se fundamenta que las habilidades "resolver problemas matemáticos" y "demostrar proposiciones matemáticas" son habilidades matemáticas generalizadas y se precisan las definiciones, las acciones y las operaciones correspondientes, todo lo cual contribuirá al enriquecimiento teórico de la Didáctica de la Matemática y constituye el objetivo del presente artículo científico. Fueron utilizadas ocho referencias bibliográficas.

**Palabras clave:** habilidades, matemática, generalización, problemas, demostraciones.

## **Abstract**

The investigation process in the project "The improvement of the teaching learning process of Mathematics and Physics at the Pedagogical Sciences University of Ciego de Avila" has allowed the identification of the necessity for defining the concept of Generalized Mathematical Ability. This definition is presented taking into consideration the authors' experience, the investigation results in the theme, the review of the Mathematical texts of the Cuban school and the scientific exchange with different teachers and methodologists, a definition that serves as starting point to state that the abilities "to solve mathematical problems" and "to proof mathematical propositions" are Generalized Mathematical Abilities, and the definitions, actions and the corresponding operations are specified in it, contributing to the theoretical improvement of the Didactics of Mathematics, and which is the objective of the present scientific article.

**Key words:** Abilities, Mathematics, generalization, problems, proofs.

## **Introducción**

Los resultados del proyecto investigativo institucional "El perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y la Física" en la Universidad "Máximo Gómez Báez" de Ciego de Ávila, su socialización e intervención en el proceso de formación inicial y

permanente de los docentes de Matemática y el estudio e intercambio de opiniones acerca de las posiciones teóricas asumidas por los autores en el trabajo de Arnaiz et al (2013) ha permitido profundizar en el tema de las habilidades matemáticas. Como consecuencia se determina la necesidad de perfeccionar las definiciones, las acciones y las operaciones de cada una de las habilidades matemáticas generalizadas, que fueron abordadas en el artículo "Las habilidades matemáticas generalizadas en la escuela cubana" publicado en la Revista EDUSOC Año 11, No 1 por Arnaiz y García (2013). Aunque lo anterior no es pretensión del presente artículo para lograrlo constituye una premisa básica definir el concepto de Habilidad Matemática Generalizada (HMG). Además esta definición constituye un fundamento teórico de valor para identificar otras habilidades matemáticas generalizadas.

Algunos maestros, profesores, estudiantes y familiares muestran insatisfacción con los resultados de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática al no existir siempre, una correspondencia entre éstos y el esfuerzo realizado por unos y otros. En varios niveles del trabajo científico metodológico de la Universidad de Ciencias Pedagógicas de Ciego de Ávila se ha identificado la necesidad de perfeccionar la preparación de los docentes de Matemática en formación como una de las vías más importantes para resolver los problemas de aprendizaje que se manifiestan en la escuela.

Los resultados de los exámenes de Matemática aplicados en la enseñanza general media, el control sistemático de la práctica laboral de los estudiantes de la carrera de Matemática – Física en la Universidad de Ciego de Ávila y el proceso de validación de las diferentes disciplinas de la referida carrera permitieron identificar insuficiencias en el dominio del contenido y los métodos para la resolución de problemas matemáticos y la demostración de proposiciones matemáticas. Al enfrentar a los docentes en formación a la solución de los exámenes de ingreso a la educación superior y otros ejercicios con similares exigencias se constata que no tienen suficientemente desarrolladas las habilidades para la resolución de problemas matemáticos y para la demostración de proposiciones matemáticas lo cual se conjuga con limitaciones en el dominio de los métodos y procedimientos para enseñarlas a sus alumnos de la enseñanza general media.

Aunque se han logrado avances desde el punto de vista teórico y metodológico en la dirección del aprendizaje de las habilidades matemáticas generalizadas, existe una carencia en cuanto a fundamentos y orientaciones metodológicas para la dirección del aprendizaje de las habilidades

matemáticas "resolver problemas matemáticos" y "demostrar proposiciones matemáticas", asumiéndolas como habilidades matemática generalizadas. Consecuentemente la Didáctica de la Matemática requiere definir las acciones y las operaciones correspondientes, lo cual constituye el objetivo del presente artículo.

### **Desarrollo**

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática como sistema es estudiado por la Didáctica de la Matemática, los componentes de este sistema son el profesor, el estudiante, el grupo (componentes personales) y los objetivos, el contenido, los métodos, las formas, los medios y la evaluación del aprendizaje (componentes personalizados).

El contenido como componente del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática incluye los conocimientos (conceptos, teoremas y procedimientos), habilidades, hábitos, capacidades, experiencia transformadora (investigativa), valores, convicciones y normas de conductas que al ser asimiladas por los estudiantes, en el aprendizaje, posibilitan el cumplimiento de los objetivos planteados.

Existe consenso de que las habilidades son modos de actuación que permiten operar con el conocimiento. Sobre la relación entre los conocimientos y las habilidades, se destaca la referida a que el conocimiento del estudiante se manifiesta fundamentalmente mediante las habilidades, pero debe añadirse que éstas, a su vez, propician el desarrollo del conocimiento.

Es compartido por numerosos especialistas la necesidad de utilizar el concepto de habilidad como criterio fundamental para diseñar el proceso de enseñanza – aprendizaje. Los autores asumen que "... No se puede separar el saber del saber hacer, porque saber es siempre saber hacer algo y no puede haber conocimientos sin habilidades, sin saber hacer. De lo dicho resulta claro que para precisar qué es saber hacer hay que determinar los tipos de habilidades gracias a las cuales funcionan o se manifiestan los conocimientos" (Campistrous et al., 1989: 19).

En la época actual, distinguida por el desarrollo acelerado de las ciencias, se produce un constante crecimiento del volumen de conocimientos, a lo cual no escapa la Matemática y no se deben seguir aumentando los contenidos curriculares por razones higiénicas y económicas por lo que es necesario concebir de una forma diferente el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática (PEAM) de forma tal que no se produzcan sobrecargas para el estudiante sin disminuir la calidad de la educación, ni renunciar a los objetivos de la enseñanza de la asignatura.

Para algunos especialistas la solución a esta problemática está en garantizar un proceso óptimo y racional a partir de priorizar la enseñanza de procedimientos generalizadores, integradores y actitudinales que permitan al educando continuar aprendiendo por sí mismo. Autores de reconocido prestigio internacional plantean que para contribuir a la necesaria optimización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, se requiere determinar aquellas habilidades generales y esenciales que permitan aplicar, de manera independiente, los conocimientos seleccionados y a partir de ellas obtener nuevos conocimientos. Campistrous et al (1989), Talízina (1992), Macedo (2001) y Pla (1999).

Esta idea rectora para la determinación del sistema de habilidades (generalidad y esencialidad) se infiere del planteamiento acerca de que "... el contenido que se debe asimilar no son los elementos específicos que se suceden unos a otros y que se van asimilando por separado, sino la esencia que está detrás de ellos. Son fenómenos específicos que en este caso sirven solo como un medio de asimilación; la esencia se conoce mediante el fenómeno". (Campistrous et al., 1989: 23).

Este planteamiento encuentra sus fundamentos en la obra de Nina F. Talízina, de manera particular cuando expresa que "... es necesario incluir en el contenido de la enseñanza, precisamente la esencia escondida tras los fenómenos particulares...(Talízina, 1987: 5), argumentando que "la sustitución de los procedimientos específicos de la actividad cognoscitiva por generalizadores eleva sustancialmente el efecto de desarrollo de la enseñanza, coadyuva a la formación del pensamiento teórico" (Talízina, 1992: 61).

Consecuentemente con lo referido, en los documentos estatales de planificación y organización del PEAM se proyecta "Desarrollar en los alumnos habilidades sólidas en el trabajo con algoritmos o cálculos elementales, así como con métodos y procedimientos indispensables..." (Cuba. MINED, 1987: 8) es decir, desde hace más 20 años ya existe una orientación estatal para la determinación del contenido matemático en correspondencia con el principio anterior.

Las ideas desarrolladas por Campistrous et al (1989) en cuanto a la precisión de las habilidades con tales características (procedimientos generalizadores), a saber: calcular, evaluar, simplificar, resolver ecuaciones, descomponer en factores y relacionar gráficos y propiedades de funciones, han sido perfeccionadas como resultado del trabajo de un equipo de investigadores del departamento de Ciencias Exactas de la UCP "Manuel Ascunce Domenech" Arnaiz et al (2013).

Se ha asumido que ellas son Habilidades Matemáticas Generalizadas (HMG) porque tienen salida prácticamente en todos los grados de la Enseñanza General Media y porque cada una incluye varios procedimientos específicos. Aunque esta caracterización orienta la labor del docente, la teoría y la práctica demandan una definición de este concepto que permita utilizarlo como concepto genérico para definir las habilidades referidas y otras con estas características.

El término generalización ha sido abordado por diferentes autores entre los que se destacan García (1998) y Davýdov (1985). Entre estos autores existe consenso de que generalizar es abstraer o aislar mentalmente datos comunes de una cosa, idea o proceso para reunirlos formando coherentemente un concepto que los representa a todos. Se comparte el criterio de que "al generalizar, revelamos lo común en los objetos y fenómenos de la realidad individualizados" (Davýdov, 1985: 13).

En la obra "Tipos de generalización en la enseñanza" se expresa que "Designio de la presente obra es fundamentar la idea de que una auténtica solución de los problemas concernientes a la actual instrucción escolar, en cuanto a las bases lógico – psicológicas de la misma, presupone un cambio del tipo de pensamiento proyectable mediante el contenido de las disciplinas y los métodos de su enseñanza. El perfeccionamiento de estos últimos ha de ejecutarse en el plano de esa perspectiva cardinal: formar en los escolares el pensamiento científico - teórico". (Davýdov, 1985: 7).

El proceso de generalización exige la búsqueda de rasgos comunes en diferentes objetos, fenómenos o procesos. "(... La facultad de usar una u otra regla presupone la separación de cierta calidad en el objeto con la que justamente dicha regla sea correlacionable. En esencia, ella está vinculada con toda una clase de objetos o situaciones (el concepto de "regla" pierde su sentido cuando se opera con un solo objeto)" (Davýdov, 1985: 18).

Teniendo en cuenta los fundamentos anteriores los autores elaboraron la siguiente definición: Las Habilidades Matemáticas Generalizadas (HMG) son aquellas cuyas acciones conforman un proceder generalizador que permite operar con diferentes conocimientos matemáticos.

Como se ha expresado las habilidades matemáticas generalizadas son aquellas que se forman durante la ejecución de las acciones y operaciones que tienen un carácter esencialmente matemático. Ellas se refieren no sólo a la preparación del alumno para aplicar sistemas de acciones de carácter algorítmico inherentes a una determinada actividad matemática (calcular,

evaluar, simplificar, resolver ecuaciones, descomponer en factores y relacionar gráficos x.y propiedades de funciones). Para los autores estas habilidades incluyen además la preparación del alumno para aplicar sistemas de acciones de carácter heurístico para la resolución de problemas y las demostraciones de proposiciones matemáticas.

La definición de HMG, el creciente nivel de sistematicidad de la resolución de problemas y de las demostraciones en el PEAM en la escuela cubana, constituyen fundamentos para asumir la resolución de problemas matemáticos y la demostración de proposiciones matemáticas como HMG.

Teniendo en cuenta los fundamentos anteriores los autores definen que:

Resolver problemas matemáticos es una Habilidad Matemática Generalizada que consiste en un proceso de búsqueda de procedimientos desconocidos para de una situación inicial conocida llegar a una situación final desconocida.

Demostrar proposiciones matemáticas es una Habilidad Matemática Generalizada que consiste ante todo en enmarcar una situación dada en un concepto matemático, es decir, constatar que esa situación dada cumple o no con las características esenciales de un concepto. Ello se logra a través de una cadena finita de inferencias lógicas, aplicando los conceptos y teoremas ya estudiados. Cuando se utiliza sólo una inferencia lógica estamos en presencia de una fundamentación.

A partir del contenido del Programa Heurístico General (PHG) para el trabajo con contenidos matemáticos que requieren el empleo de procedimientos heurísticos, las etapas sugeridas por George Polya que distinguen el proceso de resolución de problemas reveladas en Ballester et al (1992) y la experiencia de los autores como profesores de matemática se determinaron las acciones y operaciones para las HMG "Resolver problemas matemáticos" y "Demostrar proposiciones matemáticas". Ello constituye una base orientadora para el accionar de docentes y estudiantes en el PEAM, y una contribución a la teoría de la Didáctica de la Matemática.

*Habilidad Matemática Generalizada: resolver problemas matemáticos*

1. Comprender el enunciado del problema.

- Leer cuidadosamente y comprender el significado del texto.
- Reproducir el contenido con tus propias palabras.

- Separar lo dado de lo buscado.
- Confeccionar, si es posible, una figura de análisis que ilustre la situación.
- Relacionar el problema con alguna esfera de la vida y áreas de la Matemática.

2. Encontrar la vía de solución.

- Reflexionar sobre los procedimientos, estrategias, reglas y medios auxiliares heurísticos.
- Elaborar un plan de solución.
- Reflexionar sobre la vía planificada.

3. Realizar el plan elaborado.

- Identificar los pasos según el orden planificado.
- Calcular, evaluar, simplificar, resolver ecuaciones, descomponer en factores y relacionar gráficos y propiedades de funciones, según las necesidades.
- Identificar si se determinó lo buscado.

4. Comprobar la solución, evaluarla críticamente y dar la respuesta.

- Relacionar lo encontrado con el texto del problema (reflexiones lógicas y comprobación matemática)
- Reflexionar sobre otras vías de solución.
- Valorar la posibilidad de utilizar las vías de solución en otros problemas.
- Responder la pregunta formulada en el problema.

*Habilidad Matemática Generalizada: demostrar proposiciones matemáticas*

1. Reflexionar sobre la proposición dada.

- Identificar el concepto relacionado con lo que se debe demostrar.
- Sustituir los conceptos por sus definiciones.
- Identificar la estructura lógica de la proposición (premisas, tesis)
- Sustituir, si es necesario, la proposición por otra equivalente.
- Establecer relaciones con otras proposiciones que tengan premisas y tesis similares.

## 2. Encontrar la vía de demostración.

- Reflexionar sobre los procedimientos, estrategias, reglas y medios auxiliares heurísticos.
- Elaborar un plan de demostración (directa, indirecta) donde se precisen las inferencias lógicas necesarias
- Reflexionar sobre la vía demostración.

## 3. Representación de la demostración.

- Representar por escrito la cadena de inferencias y las fundamentaciones que la hacen comprensible.
- Elaborar una oración que exprese lo que se ha demostrado.

## 4. Evaluar críticamente la demostración.

- Valorar si los pasos dados son suficientes.
- Valorar la cantidad de fundamentaciones indispensables.
- Reflexionar sobre las relaciones lógicas utilizadas.
- Valorar el lenguaje y simbología utilizada.
- Valorar la posibilidad de utilizar la vía de demostración en otras situaciones.

## **Conclusiones**

Se define el concepto de habilidad matemática generalizada utilizando fundamentos didácticos sobre la teoría de las habilidades y psicológicos sobre la necesidad de utilizar los procedimientos generalizadores en la educación científica de los jóvenes. A partir de ella se definen como habilidades matemática generalizadas las de "resolver problemas matemáticos" y "demostrar proposiciones matemáticas". Además, utilizando como sustento la teoría correspondiente a los procedimientos heurísticos y los pasos dados por George Polya para la resolución de problemas, se determinan las acciones y operaciones correspondientes. Ello constituye una contribución a la teoría de la Didáctica de la Matemática que orienta a los estudiantes y profesores en el proceso de enseñanza aprendizaje de estos contenidos matemáticos.

## **Bibliografía**

Arnaiz Barrios, Ibrahim et al (2013). Libro electrónico: Temas de Didáctica de la Matemática. ISBN 978-959-18-0916-2.

Arnaiz Barrios, Ibrahim y García Rodríguez, José Antonio (2013). Las habilidades matemáticas generalizadas en la escuela cubana. Revista electrónica Educación y Sociedad. UCP "Manuel Ascunce Domenech". Ciego de Ávila. No 1 Año 11. ISSN 1811-9034 y RNPS/ 2073.

Arnaiz Barrios, Ibrahim (2003). Modelo de actuación de los docentes para favorecer la aplicación integrada del contenido desde el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ciego de Ávila. Cuba. 2003.

Ballester Pedroso, Sergio et al (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Tomo I. 471p.

Campistrous Pérez, Luis (1989). "Sobre las habilidades matemáticas". En: Orientaciones Metodológicas. Matemática 10mo grado. Editorial Pueblo y Educación La Habana. pp. 5-7.

Cuba. Mined (1999). "Programa de Matemática para las Secundarias Básicas seleccionadas. Curso escolar 1999 - 2000". Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 20p.

Cuba. Ministerio de educación (1987). "Proyecto. Matemática. Concepción general de la asignatura en el subsistema de la educación general politécnica y laboral". (Folleto). 25p.

Davydov, V (1978) Tipos de generalización en la enseñanza. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. 485 p.

Macedo, Beatriz (2001). "La enseñanza de las ciencias en América Latina y el Caribe". Conferencia central del simposio 4 sobre Didáctica de las Ciencias en el nuevo milenio. Evento Pedagogía '2001. MINED. Ciudad de La Habana. 15p.

Pla López, Ramón (1999). Ponencia "Influencia de una concepción didáctica integradora en el modo de actuación profesional de los docentes de ciencias sociales". En: Pedagogía '99. MINED. Ciudad de La Habana. 15p.

S/A. HABILIDADES MATEMÁTICAS. En sitio [www.monografias.com](http://www.monografias.com) >Matematicas. Las habilidades matemáticas. Fecha de consulta 30 de mayo de 2014.

Talízina, Nina F. (1992). La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares. Editorial Ángeles. México. 432p

Talízina, Nina F. (1987). "Métodos para la creación de programas de enseñanza". DEPES – MES, Vicerrectoría Docente. Universidad de Camagüey. 57p.

Talízina, Nina F. (1998). Psicología de la Enseñanza.: Biblioteca de Psicología Soviética. Editorial Progreso, Moscú. 366 p.