

Desarrollo del razonamiento geométrico de la derivada en estudiantes universitarios usando el modelo de Van Hiele

Development of geometric reasoning of the derivative in university students using the Van Hiele model

Marco Ruiz-Cumapa

✉ mruizc2023@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-7284-0944>

Universidad Tecnológica del Perú, Perú.

Resumen

El propósito de este estudio es desarrollar una estrategia didáctica para evaluar la eficacia del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de la derivada en alumnos de una universidad privada de Lima. La metodología se basa en un enfoque cuantitativo, de tipo aplicado y de diseño cuasi experimental, en una muestra de 80 estudiantes. Se utiliza una encuesta de satisfacción para evaluar la percepción de los estudiantes respecto a la estrategia didáctica, así como dos pruebas pedagógicas que evalúan las competencias matemáticas de comunicación y argumentación, modelado y representación, y resolución de problemas. Se utilizaron como estadígrafos la media, mediana, moda, desviación estándar y varianza para medir los resultados descriptivos y la prueba T de Student para los resultados inferenciales. Concluyendo, que la aplicación de la estrategia didáctica usando el modelo de Van Hiele mejora significativamente el aprendizaje de la derivada en estudiantes de una universidad de Lima.

Palabras clave: aprendizaje de la derivada, competencias matemáticas, niveles de Van Hiele, pensamiento geométrico

Abstract

The purpose of this study is to develop a teaching strategy to evaluate the effectiveness of the Van Hiele model in learning the derivative in students of a private university in Lima. The methodology is based on a quantitative approach, applied type and quasi-experimental design, in a sample of 80 students. A satisfaction survey is used to evaluate the students' perception

of the teaching strategy, as well as two pedagogical tests that evaluate the mathematical skills of communication and argumentation, modeling and representation, and problem solving. The mean, median, mode, standard deviation and variance were used as statisticians to measure the descriptive results and the Student's T test for the inferential results. Concluding, that the application of the didactic strategy using the Van Hiele model significantly improves the learning of the derivative in students at a university in Lima.

Keywords: learning the derivative, mathematical skills, geometric thinking, problem solving, Van Hiele levels

Introducción

Los trabajos de investigación relacionados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas abordadas en estos últimos años se han puesto en una mayor atención a los niveles conceptuales de objetos geométricos. Ello originó la necesidad de un gran número de estrategias y técnicas metodológicas de diversos campos como en la psicología, la tecnología educativa y otras. A partir de estas, se desarrollan diversos trabajos de investigación en las áreas de la matemática que buscan validar, profundizar y generalizar los resultados de índole de aspectos geométricos que se han obtenido.

Esta investigación toma en cuenta factores en el desarrollo de estrategias didácticas que se implementarán en el problema a tratar, tal y como lo sostiene Alcibar (2024), afirmando que en la actualidad es relevante implementar una estrategia pedagógica adaptativa que fomente el uso innovador, creativo y educativo en actividades de enseñanza de las ciencias de nivel superior, como el uso de la inteligencia artificial y la realidad virtual para la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario, de manera que se produzca una motivación en estudiantes y origine un deseo por aprenderlas de forma diferente con creativa, dinamismo y originalidad.

Es por ello, que, en esta investigación se desarrolló una estrategia didáctica sobre el aprendizaje de la derivada usando el razonamiento geométrico de Van Hiele y con la colaboración tecnológica del software GeoGebra, el cual nos permite comprender mejor el concepto y propiedades de la derivada de manera más precisa.

La presente investigación orienta el razonamiento geométrico de Van Hiele a diferentes líneas de estudio relacionadas con el concepto de la derivada de una función, y que sabemos se convierte en uno del tema fundamental del cálculo diferencial para los estudiantes universitarios de los primeros ciclos. Además, incluimos como aspectos medulares de esta investigación el mejoramiento de las competencias matemáticas de comunicación y argumentación, para la adquisición de conceptos y conclusiones en problemas asociados a la derivada de funciones reales de variable real, el modelamiento y representación, para obtener un mejor proceso de solución en los ejercicios y problemas, y la resolución de problemas, que permite comprender bajo un enfoque geométrico la importancia de utilizar la derivada para dar solución a problemas de contexto real.

Por ello, el objetivo de esta investigación es determinar la efectividad de una estrategia didáctica basado en el modelo de razonamiento geométrico propuesto por Van Hiele en el desarrollo de las competencias matemáticas de comunicación y argumentación, modelamiento y representación y la resolución de problemas en el aprendizaje de la derivada.

Consideramos pertinente esta investigación, pues proporciona a los estudiantes y docentes un panorama más claro sobre la importancia que poseen las derivadas en los distintos ejercicios y problemas, así como sus aplicaciones bajo un contexto real en diferentes carreras profesionales.

Para Cueva et al. (2023), sostiene que las investigaciones cuantitativas ofrecen:

Beneficios al permitir la obtención de resultados precisos, objetivos y generalizables en diferentes campos, desde la evaluación de tratamientos médicos hasta la toma de decisiones en el ámbito político y empresarial. La recopilación y el análisis de datos cuantitativos permiten una comprensión más profunda de los fenómenos estudiados y brindan una base sólida para la toma de decisiones informadas.
(p. 29)

Por lo establecido por el autor, la metodología de esta investigación se desarrolla bajo los lineamientos del enfoque cuantitativo, de tipo aplicada y con un diseño cuasi experimental.

La población está conformada por los estudiantes de los primeros ciclos de una universidad

privada de Lima que están cursando el curso de Matemática 1, donde la obtención de la muestra fue no probabilística, y que está dado por 80 estudiantes divididos en dos grupos, uno grupo control conformado por 40 estudiantes y un grupo experimental conformado por 40 estudiantes.

Para cumplir con el objetivo de esta investigación, se utilizó como estrategia didáctica un módulo de aprendizaje estructurado en los cinco niveles del razonamiento geométrico de Van Hiele, en donde el estudiante por medio del software GeoGebra realiza actividades relacionadas al proceso de aprendizaje de la derivada, adicional a ello, también se elaboró una encuesta de satisfacción que mide la percepción de los estudiantes sobre la aplicación de la estrategia didáctica, y dos pruebas pedagógicas que sirvieron como el pre y post test aplicados a los dos grupos de estudiantes para medir el antes y después de los resultados obtenidos en las competencias matemáticas de comunicación y argumentación, modelamiento y representación, y la resolución de problemas. Para la ejecución de las actividades del módulo se desarrollaron de la siguiente forma:

- Se aplicó la prueba pedagógica pre test correspondiente a la muestra conformada por ambos grupos y obtener los resultados con el fin de determinar un diagnóstico sobre el estado inicial de los niveles en las competencias matemáticas de comunicación y argumentación, modelamiento y representación y la resolución de problemas.
- Se realizó la intervención al grupo experimental mediante el desarrollo del módulo de aprendizaje llamado “*Aprendiendo con derivadas*” por una duración de 12 sesiones de clase en el aula. Por otro lado, en el caso de los estudiantes del grupo control se desarrolló el tema de las derivadas con las mismas estrategias didácticas de forma tradicional.
- Se aplicó la prueba pedagógica post test al grupo experimental y control, luego de la finalización del módulo de aprendizaje.
- En la última sesión se pidió a los estudiantes del grupo experimental contestar una encuesta de satisfacción para conocer su percepción sobre las actividades de la estrategia didáctica. En esta parte los estudiantes sugirieron que el módulo fuese más fácil y amigable de manipular con el apoyo del software GeoGebra, y que aumentara el tiempo que se dedica para resolver los ejercicios y problemas, bajo ese lineamiento, una cantidad

considerable de estudiantes comentaron que les hizo falta tiempo para terminar las actividades del módulo.

- Se procedió a desarrollar el análisis estadístico de forma descriptivo e inferencial en base a los resultados recogidos en esta investigación.

En concordancia con Arias (2021), afirmando que el objetivo de una encuesta es recaudar información pertinente asociado a temas relacionados con una problemática y que presentan algún tipo de analogía con el estudio a realizar, dicha encuesta puede ser tratada de manera oral o escrita. Bajo los lineamientos de este autor, y conocer la percepción que tienen los estudiantes sobre la estrategia didáctica, se aplicó una encuesta de satisfacción solamente al grupo experimental para medir la percepción de la estrategia didáctica.

Desarrollo

Vamos a describir aspectos teóricos asociados al razonamiento geométrico que sostiene Van Hiele, estos son: reconocimiento o visualización, clasificación, análisis, deducción formal y rigor. Posteriormente, se exponen los fundamentos teóricos del aprendizaje de la derivada clasificadas en tres dimensiones que intervienen en su desarrollo, las cuales son: comunicación y argumentación, modelamiento y representación y la resolución de problemas.

El razonamiento geométrico

Dentro del currículo que establece el ministerio de educación sobre los cursos de formación en primaria y nivel secundario, la asignatura de geometría requiere ser tratado con cuidado, pues cuando el estudiante hace su ingreso a la educación superior universitaria requiere tener desarrollado adecuadamente el razonamiento geométrico, porque los conceptos, definiciones, propiedades y aplicaciones asociados al objeto de la derivada guarda mucha relación con los saberes previos establecidos en la etapa escolar.

Para Proenza (2008), el razonamiento geométrico es considerado como una de las distintas maneras de pensamiento matemático, se sustenta básicamente en comprender un modelamiento de tipo tridimensional del espacio físico. Este tipo de pensamiento posee una sólida base que se prepara desde las primeras relaciones de la persona con su entorno, de manera que sistematiza y generaliza los contenidos y objetos geométricos enseñados en las instituciones

educativas de educación básica. El razonamiento geométrico tiene que realizar un desarrollo continuo de tres habilidades, la vista espacial, la representación espacial y la imaginación espacial de manera que deben estar estrechamente conectadas entre sí.

Según Patiño (2021), la geometría se convierte en una parte fundamental de las ciencias matemáticas, pues, ello ha estado en constante evolución. Al principio se da por la necesidad de aprender las diferentes formas geométricas para luego utilizarlas en la solución de escenarios cotidianos como la edificación de viviendas, entre muchas. También es significativo acordarse que la ciencia de la geometría fue la primera rama pionera de la matemática antigua que ha sido reglamentada mediante teoremas y leyes, por ejemplo, el famoso teorema de Pitágoras o la ley del paralelogramo de fuerzas en física, y que de esta manera ayudó al inicio de la formalidad matemática.

En concordancia con la afirmación de Barreto (2021), las actividades didácticas asociadas a la geométricas que son propuestas se encuentran dirigidas a fortalecer las experiencias e indagación dadas por los estudiantes, conforme a las particularidades siguientes: ofrecer dinámicas pedagógicas interesantes, para que los estudiantes logren integrar a su entorno social y ofrecer soluciones bien argumentadas; propiciar el progreso de la creatividad del pensamiento geométrico, en torno a actividades propuestas. Además, favorece la forma de expresar diferentes maneras de resolución y dando explicaciones de casos contextualizados y por último, proporcionar el fácil uso de diversos materiales; que no sólo se limite al uso del papel y lápiz.

Para Ramos (2015) la geometría en estos tiempos realiza un estudio profundo sobre las características que poseen los objetos en posición, tamaño y forma; y en la aplicación de figuras planas cómo son los polígonos y figuras en el espacio. Estos siempre son objeto de estudio en diversas ramas como: el diseño de máquinas, la construcción y la ingeniería.

Incluir esta variedad en torno a tópicos matemáticos como objeto de estudio en los distintos silabo de las carreras universitarias, origina en el estudiante un problema cuando comienza su vida universitaria, además, para el docente se transforma en un reto al diseñar distintas metodologías de aprendizaje para una mejor y óptimo asimilación de los conceptos geométricos que se vuelven indispensables en su carrera universitaria.

Para Barreto (2021) las buenas prácticas académicas hacia los estudiantes permitirán determinar el progreso de aquellas competencias matemáticas y enlazarlas a las categorías del pensamiento geométrico, de manera que se trabaje eficazmente e interactúe con el estudiante. Este autor considera que es esencial el avance de otras áreas de la matemática, ya que sus análisis y aportes en la geométrica proporcionan diferentes ideales para la comprensión de las demás áreas.

De la misma manera Bustos et al. (2013) sostienen que la geometría nos proporciona diferentes puntos de vista que se aproximan en todas las áreas de la matemática y el más significativo es usado para resolver cuestionamientos que se dan en la ingeniería, economía, medicina y otras áreas del saber. A esto, podemos afirmar que las interpretaciones que se le da a la geométrica en diferentes áreas siguen brindándonos visiones sobre el entendimiento intuitivo y deductivo sobre los progresos en la mayoría de las áreas.

Razonamiento geométrico de Van Hiele

De acuerdo con Jaime (1993), en esta investigación se proponen descriptores en todos los niveles del razonamiento geométrico, estos nos ayudarán a reconocer los grados de adquisición que un estudiante puede lograr y situarse en el nivel de razonamiento respectivo. Sus diferentes niveles representan cómo el estudiante diversifica y realiza actividades, también, la manera en cómo los estudiantes asimilan y realizan áreas asociadas al razonamiento, a partir de la idea geométrica.

Nivel 1: Reconocimiento o visualización

Para Chavarria-Pallarco (2020), en este nivel el estudiante desarrolla una percepción de figuras geométricas en su totalidad, es decir, en su forma global, incluyendo en sus descripciones propiedades no relevantes, normalmente sobre su posición, tamaño o forma de sus elementos que son resaltados en sus características. Por otro lado, hay un reconocimiento a sus formas que son visibles y no se logran reconocer e identificar los fragmentos y componentes de las figuras, en este nivel no es posible determinar las características de las figuras en forma explícita y detallada. En este nivel, los estudiantes logran evidenciar distintas particularidades, que serán los descriptores en este nivel de razonamiento geométrico.

Nivel 2: Análisis

El estudiante llega a desarrollar la capacidad de analizar fragmentos de las figuras. Aquellas propiedades son determinadas por experimentos a través de distintas actividades, como: medición, observación y doblaje de las figuras.

Un ejemplo para ilustrar este nivel son los rectángulos, dicho polígono posee diagonales iguales, pero no se explican las relaciones que hay entre distintas familias de figuras; es el caso de un rombo que no se percibe de forma explícita comparado a un paralelogramo. Por lo cual, el estudiante logra observar las figuras de manera distinta, y reconoce que las respectivas figuras hechas de elementos guardan propiedades usadas para ejecutar categorizaciones de inclusión. Además, en este nivel se descubre y generaliza algunas propiedades que los estudiantes no conocían.

Nivel 3: Clasificación

En este nivel se usa cierto razonamiento lógico de manera informal con el objetivo de poder deducir propiedades y relaciones de las figuras, esto llega a ser el transcendental en el tema de las derivadas.

Por otro lado, se establecen figuras con el uso de sus propiedades: por ejemplo, se sabe que cada cuadrado es un rectángulo, pero lo contrario no es cierto. También, en este nivel los estudiantes no están capacitados para organizar una continuación en el razonamiento que determine alguna justificación en sus observaciones. Asimismo, en este nivel se logran implicancias lógicas específicas, un ejemplo para ilustrar esta característica es cuando se asume que los cuadriláteros tienen la propiedad de igualdad de ángulos opuestos, eso se cumple por el paralelismo de los lados. Además, los estudiantes logran comprender las primeras definiciones que refieren las relaciones de figuras con sus partes que los constituyen.

Nivel 4: Deducción formal

En este nivel, los estudiantes logran desarrollar una serie de proposiciones para lograr concluir una propiedad de otra, además, dichas demostraciones tienen sentido y es requisito necesario para la verificación de la verdad de tal afirmación. Así, el estudiante logrará probar el axioma que significa que la suma de ángulos de un triángulo es el mismo a 180° .

Nivel 5: Rigor

Acá los estudiantes son aptos en investigar el grado de rigor de diversos sistemas de deducción. Los estudiantes identifican con firmeza, independencia y solidez en los axiomas de fundamentos geométricos propuestos, por ejemplo, por el matemático alemán David Hilbert. Además, por su alto grado de abstracción y complejidad. Para Jaime (1993), sugiere que este último nivel, tiene que ser considerado como una categoría aparte.

Aprendizaje de la Derivada

La derivada se encuentra inmerso en toda la trayectoria de las diferentes áreas de la ingeniería, economía, medicina y demás áreas del saber, deben ser abordadas con diversas prácticas para evitar los inconvenientes y conflictos que se presentan de forma tradicional, lo que permite, muchas veces una restricción al empleo de fórmulas para derivar y no se resalta el valor de aplicación de problemas propios de la misma geometría o la ingeniería; como por ejemplo, modelar la ecuación de la recta tangente de una curva dada en forma implícita, donde el valor derivado sea cero o no se encuentre definido. Bajo este escenario, nos estamos refiriéndonos al problema de la recta tangente.

Según Manjarrez (2022), la disociación que se genera en la transmisión de conceptos teóricos con las reglas de derivación ocasiona un abrumador desinterés en estudiantes que estudian ciencias e ingeniería, por tal motivo, se genera un alto índice de deserción del tema y hasta en ocasiones el retiro definitivo de la asignatura.

La derivada en los primeros ciclos de la universidad

Como afirma Trigueros (2022), el estudiante tiene que llegar a un nivel de madurez y concientización, de que gran parte de las teorías matemáticas siempre necesitan un periodo largo de tiempo, con el fin de desarrollarse. A lo largo de la historia de las ciencias, la matemática tiene una fuente interminable de problemas únicos y curiosos que nos han servido para establecer contenidos científicos, y así vincularlos con otras disciplinas del conocimiento. Efectivamente, es de saber que un estudiante de los primeros ciclos de una universidad debería situar dichas ideas y conceptos matemáticos como esenciales en su contexto histórico y social.

Por otra parte, Argoti (2024) sostienen que el pensamiento asociado a la matemática puede

explicarse a través de la reflexión directa y espontánea, de manera que los estudiantes den cuenta del potencial matemático que tienen, durante el proceso de descubrimiento e invención matemática. También, sostiene que el razonamiento geométrico desarrolla procedimientos de sistematización y contextualización de conceptos matemáticos a través de una vida cotidiana con múltiples tareas diarias.

Según Martínez (2024) aprender la derivada bajo una visión geométrica hay que tener en cuenta su forma de diseñar y construir; antes de establecer la deducción la derivada, se toma algunos supuestos del método científico, esto es, en primer lugar hay una observación de un hecho matemático, que puede encontrar el valor de la pendiente de la ecuación de una recta, luego se prueba varias veces la misma ocurrencia en distintas situaciones, por último, se generaliza la ocurrencia mediante una ley o teorema, se comprueba la validez del teorema y se concluyen algunas inferencias como propiedades en caso específicos.

Para esta investigación se van a considerar las competencias matemáticas que la universidad está desarrollando en los primeros ciclos. La universidad como parte de la población en nuestro estudio, nos regimos a sus disposiciones en cuanto a su perfil de formación académica.

Competencias matemáticas

En la actualidad, el enfoque por competencia es manejado nuestra comunidad científica mundial como estrategia pedagógica que se encuentra pasos adelante del aprendizaje por contenidos, de manera que se direcciona a la formación de ciudadanos desarrollando su mentalidad de reflexivos y de construcción, permitiendo la identificación y comprensión de los cargos que cumplen aquellas ciencias matemáticas en el contexto mundial.

Bajo esta premisa, las habilidades en torno a las matemáticas nos ayudan al desarrollo de capacidades cognitivas con el fin de proponer situaciones que den una total o parcial solución a un problema bajo un contexto social, en otras palabras, las competencias matemáticas desarrollan los conocimientos que permite al individuo se pueda desarrollar competentemente.

Según Herrera-Castrillo (2024) el uso de la simulación emerge como un recurso útil que colabora con el entendimiento de conceptos abstractos y complejos de la matemática, y fomenta el crecimiento de habilidades prácticas y la experimentación. Estas tecnologías facilitan a los

estudiantes la visualización y reconocimiento de fenómenos físicos y la realización de análisis cuantitativos. Esto potencia su proceso de aprendizaje proporcionándoles una experiencia más parecida a la realidad.

Entonces, de acuerdo a las investigaciones de los autores mencionados podemos concluir que competencia matemática ubica la capacidad que tienen los individuos para dar pie a sus destrezas, habilidades y conceptos matemáticos para lograr atesorar su comprensión en temáticas que son principales para ellos con el fin que logren promover su capacidad de acción.

Comunicación y argumentación

De acuerdo con la investigación de Díaz (2021) sostiene que la comunicación matemática está relacionada para que el estudiante logre comunicar las características de nivel geométrico, estableciendo y transformando sus coordenadas en un conjunto referencial. También, establecer relaciones con estas usando un lenguaje de índole geométrico. Además, los argumentos son utilizados para la justificación o explicación de proposiciones, procedimientos y soluciones de un problema establecido. También, el estudiante debe saber resolver la problemática, se puede ejemplificar en la situación de cómo una persona prefiere tomar la decisión de aceptar o dar rechazo a la hipótesis de un caso.

Como lo menciona Iñiguez (2015) la comunicación matemática se relaciona con el entendimiento de mensajes orales, escritos y también visuales que contengan alguna información de índole matemático y lograr exponer las cuestiones planteadas de manera oral, visual y/o escrita, brindando distintos niveles de exactitud teórica, técnica y práctica.

En esta investigación, la comunicación matemática se mide a través de los indicadores: Establecer relaciones conceptuales, elaborar organizadores, interpretar los resultados matemáticos, emplear el lenguaje gráfico, icónico y simbólico, diseñar tablas y escribir conceptos y relaciones matemáticas.

Modelamiento y representación

Para Díaz (2021) manifiesta que en el modelamiento el estudiante logra edificar un modelamiento que reproduce las particularidades de objetos, su ubicación y movimiento, a través de

representaciones geométricas, elementos y propiedades, así como la ubicación e innovaciones que surgen en el plano cartesiano.

Según Iñiguez (2015) sostiene que el modelamiento matemático tiene la capacidad de viajar del contexto vivencial del individuo, dando como consecuencia la interpretación de resultados. Esto nos conduce al estudio de los modelos y representaciones que ya existen y efectuar actividades de modelización y representación bajo un contexto determinado. En caso del modelamiento y representación, se considera las siguientes habilidades: Representa de manera simbólica y/o gráfica situaciones problemáticas, modela las situaciones problemáticas derivadas, elabora modelos matemáticos relacionados con la realidad e interpreta modelos matemáticos.

Resolución de problemas

Para Jiménez (2021), resolver problemas identifica, específica y plantea los distintos problemas matemáticos. Frecuentemente, los ejercicios en libros tienen complicaciones matemáticas y no cumplen con exigir al estudiante la formulación de algún tipo de esquema para su resolución, cuando son de manera automática cuando se usan palabras claves en el texto y usando técnicas de resoluciones estudiadas en las clases.

Según lo que sostiene Alcalde (2010), la resolución de problemas supone al estudiante esforzarse cognitivamente y tener mucha motivación para la ejecución de ejercicios. Entonces, se desarrollan estas siguientes habilidades: Comprensión del problema, plantear y resolver problemas matemáticos con diversas estrategias heurísticas, elaborar relaciones entre las variables, datos, ideas principales y secundarias, mostrar orden lógico resolutorio, utilizar técnicas, modelos y procesos algorítmicos, analizar la resolución e interpretar los resultados y crea otras situaciones que requieran estrategias de solución similar.

Análisis descriptivo de los datos

Al final del post-test, al grupo experimental se aplicó una encuesta de satisfacción con el fin de que los estudiantes plasmaran sus opiniones y evalúen las actividades diseñadas en módulo.

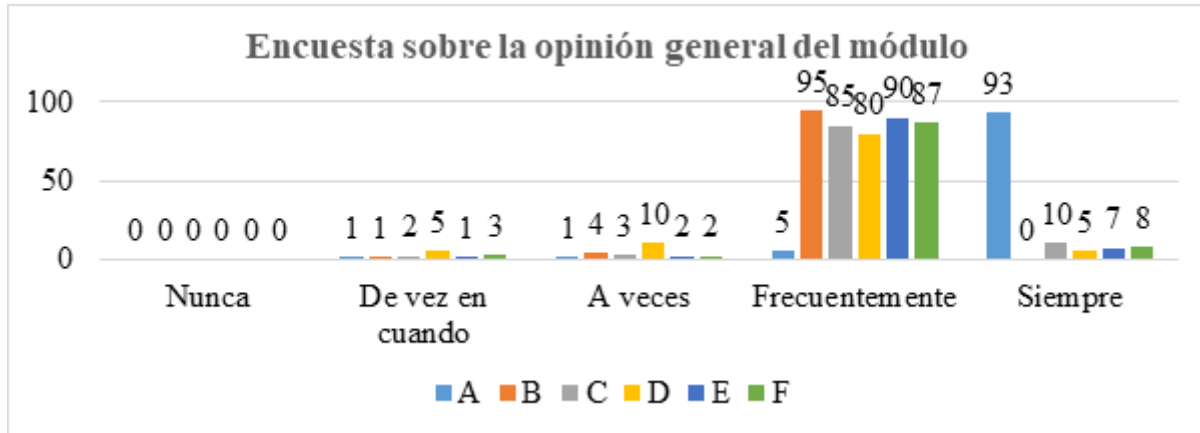


Figura 1

Resultados de la encuesta de opinión

En la figura que se muestra, se puede observar que la opinión general de los estudiantes sobre el diseño del módulo de aprendizaje basado en el pensamiento geométrico según Van Hiele, en todos los indicadores (A, B, C, D, E y F) se obtuvo el más alto porcentaje con las apreciaciones de la categoría “Frecuentemente”, interpretándose que el diseño del módulo de aprendizaje basado en el pensamiento geométrico según Van Hiele, ha satisfecho las expectativas del estudiante y se siente a gusto considerando que el desarrollo de las actividades son una propuesta positiva durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Tabla 1

Resumen estadístico del post-test

Estadísticos descriptivos	GC	GE
Media	12.48000000	15.9615385
Mediana	12.00000000	16.00000000
Moda	12.00000000	16.00000000
Desviación estándar	1.19443152	1.34106731
Varianza de la muestra	1.42666667	1.79846154
Rango	4.00000000	4.00000000
Mínimo	10.00000000	14.00000000
Máximo	14.00000000	18.00000000

Estadísticos descriptivos	GC	GE
Muestra	25.00000000	26.00000000

En la Tabla 1, se muestra el análisis estadístico de los resultados del post-test en ambos grupos, en el cual, el promedio del grupo experimental fue mayor al del grupo control.

Tabla 2

Promedio de las calificaciones del grupo experimental y de control

Grupos	Inicio	Salida
Experimental	8,00	15,96
Control	9,76	12,48

En la Tabla 2, se muestra el promedio de las calificaciones obtenidas por los estudiantes tanto del grupo experimental como el de control al iniciar y finalizar el experimento. Podemos observar que se escogió como grupo experimental a los estudiantes que obtuvieron un menor promedio y con la influencia de la estrategia didáctica obtuvieron un promedio mayor en la evaluación de salida.

Prueba de hipótesis

Para corroborar si el grupo con el cual se trabajó la estrategia didáctica obtuvo mejores resultados de aprendizaje que el grupo de control. El método estadístico para comprobar la hipótesis fue la comparación de medias y la prueba T de Student, por ser una prueba que permite medir datos cuantitativos de las respuestas que se obtuvieron de los instrumentos administrados, además, medir la influencia que existe de una de las dos variables de estudio con respecto a la otra. De donde se obtiene el valor de $t_{\text{obtenido}} = -19,59$ (valor que se obtiene de los datos de la muestra); y el valor de $t_{\text{crítico}} = \pm 2,50$ (valor que se obtiene de la tabla T de Student con $2,5\% = 0,025$ de nivel de significancia para 2 colas). Luego: Como $|t_{\text{obtenido}}| > |t_{\text{crítico}}|$, para (2 colas), es decir, tenemos $|-19,59| > |-2,50| \rightarrow 19,59 > 2,50$. Podemos ver que el valor de $t_{\text{obtenido}} = -19,59$ cae en la zona de rechazo de la hipótesis nula, por lo que estamos en la condición de aceptar la hipótesis general alterna. Con lo que a partir

de los resultados obtenidos, se infiere que si se aplica una estrategia didáctica basado en el razonamiento geométrico de Van Hiele, entonces se demuestra su efectividad al mejorar significativamente el aprendizaje de la derivada en estudiantes de una universidad privada de Lima.

Con estos elementos de referencia teórica hemos desarrollado la propuesta de una estrategia didáctica para una mejor comprensión de las competencias matemáticas relacionados con los conceptos geométricos de la derivada.

A partir de los resultados de tipo inferencial, se concluyó al 95 % de nivel de confianza que si se aplica una estrategia didáctica basada en el razonamiento geométrico según Van Hiele, entonces, hay una mejora significativamente en el aprendizaje de la derivada en los estudiantes de una universidad privada de Lima; tal como se demostró con el contraste de hipótesis (T-calculado = -19,59 cae en la zona de aceptación de la Hipótesis General) y la discusión de resultados, así como el análisis de los resultados de tipo descriptivo.

Gracias a la encuesta de satisfacción aplicada al grupo experimental, hemos podido observar que las actividades realizadas fueron favorables, pues mostraron interés en las actividades, en la forma como se llevó la experimentación, pero se pudo plasmar mayor interés en las sesiones con el software GeoGebra y el seguimiento del docente.

Además, se sugiere un uso adecuado de la inteligencia artificial en la educación universitaria, ya que esta herramienta ayuda a una mejor comprensión de los temas asociados a la matemática, sobre todo en la geometría dinámica, pues el efecto del movimiento en las imágenes ofrece al estudiante comprender adecuadamente los conceptos, características y propiedades de los objetos matemáticos, por ejemplo, la realidad virtual, cuyas investigaciones son abordadas recientemente.

Por último, se recomienda sesiones de propedéutico con más duración que lo proporcionado en el módulo para que el estudiante tenga un mejor desenvolvimiento en el software GeoGebra, garantizando de esta manera que la dependencia entre el docente y el estudiante sea mucho menor y solamente para cuestiones asociadas a los procedimientos y desarrollos de ejercicios y problemas matemáticos. Es conocido por la comunidad científica que el software GeoGebra

cuenta con muchos videos de tutoría sobre diferentes temas de matemática para que el estudiante se acerque y le sea más amigable el software, esto tiene que ser orientado de modo que el manejo del GeoGebra sea más completo, y así se pueda optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje aplicando estrategias como el aula invertida.

Conclusiones

Con respecto a los resultados de tipo descriptivo obtenidos en esta investigación, se ha demostrado en base a la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes del grupo experimental, que se percibe una aceptación favorable en utilizar la estrategia didáctica para mejorar las competencias matemáticas de comunicación y argumentación, modelamiento y representación y las resolución de problemas en el aprendizaje de la derivada.

Además, los resultados de tipo descriptivo obtenidos han demostrado que los estudiantes del grupo experimental obtuvieron mejores resultados que el grupo control en las competencias matemáticas cuando se integra la estrategia de aprendizaje basado en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele en el aprendizaje de la derivada.

Por último, de acuerdo a los resultados obtenidos y su respectivo análisis descriptivo e inferencial, esta investigación sostiene que la implementación de esta estrategia didáctica basada en el razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele ha demostrado ser efectivo en el mejoramiento de las competencias matemáticas de comunicación y argumentación, modelamiento y representación y la resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

Alcalde, M. (2010). Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la Didáctica de la Matemática en las titulaciones de Maestro en la Universitat Jaume I. (Tesis doctoral, Universitat Jaume I, Castelló de la Plana, Castelló, España). Obtenido de: <http://hdl.handle.net/10803/10368>

Alcívar-Loor, M. G., Bernal-Álava, Á. F., & Arteaga-Loor, W. (2024). Estrategia didáctica para el uso de inteligencia artificial en la enseñanza de los estudiantes de básica superior. *Revista Científica Arbitrada de Investigación en Comunicación, Marketing y Empresa REICOMUNICAR*. ISSN 2737-6354., 7(13), 167-190. doi: <https://doi.org/10>

[.46296/rc.v7i13.0209](#)

- Arias Gonzáles, J. L., & Covinos Gallardo, M. (2021). Diseño y metodología de la investigación. *Enfoques Consulting EIRL*, 1, 66-78. Obtenido de <https://acortar.link/eDFesr>
- Argoti Álvarez, J. A. (2024). El pensamiento computacional como soporte del pensamiento matemático, en la Institución Educativa Santo Domingo Savio de Chinchiná (Caldas, Colombia). *Voces Y Silencios. Revista Latinoamericana De Educación*, 15(1), 107-144. doi: <https://doi.org/10.18175/VyS15.1.2024.5>
- Barreto Salinas, E. S. (2021). Propuesta estrategias de situaciones contextualizadas para mejorar el pensamiento geométrico en estudiantes de educación secundaria de una institución educativa, Tumbes-2020. (Tesis doctoral inédita. Lima, Perú: Universidad César Vallejo).
- Bustos, PA., Giraldo, W. J., & Forero Poveda, A. (2013). Caracterización de los elementos epistemológicos que usan algunos profesores al tratar el álgebra geométrica en algunas clases de grado octavo. 10^o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. <http://funes.uniandes.edu.co/701/1/caracterizacion.pdf>
- Chavarria-Pallarco, N. A., (2020). Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica. *Investigación Valdizana*, 14(2), 85-95. <https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587>
- Cueva, T., Jara, O., Arias, J. L., Flores, F. A., & Balmaceda, C. A. (2023). Métodos mixtos de investigación para principiantes. Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi Perú. <https://doi.org/10.35622/inudi.b.106>
- Diaz Aguinaga, L. (2021). Efecto del E-portafolio en la competencia matemática en los estudiantes del segundo grado de educación secundaria. (Tesis maestría. Lambayeque, Perú: Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo).
- Díaz, Y., Cruz, M., Velázquez, Y., & Molina, S. (2019). Estrategias didácticas para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, (103), 7-23. <https://thales.cica.es/epsilon/?q=node/4806>

- Herrera-Castrillo, C. J. (2024). Desarrollo de competencias a través de prototipos y simuladores en un entorno interdisciplinario de física-matemática. *Revista Oratores*, 1(20), 78–102. doi: <https://doi.org/10.37594/oratores.n20.1243>
- Íñiguez Porras, F. J. (2015). El desarrollo de la competencia matemática en el aula de ciencias experimentales. *Revista Iberoamericana De Educación*, 67(2), 117–130. doi: <https://doi.org/10.35362/rie672256>
- Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías. La evaluación del nivel de razonamiento. (Tesis de doctorado). Universidad de Valencia. Obtenido de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/>
- Jiménez-Salazar, M. A., Cubero-Jiménez, A., Quesada-Vargas, R., & Pereira-Chaves, J. (2021). Desarrollo de las habilidades de pensamiento crítico, creatividad e innovación y resolución de problemas en Ciencias noveno año, Costa Rica. *Revista Electrónica Calidad En La Educación Superior*, 12(1), 308–337. doi: <https://doi.org/10.22458/caes.v12i1.3560>
- Manjarrez, C. y Romero, Y. (2022). Análisis de las estrategias instruccionales utilizadas para el aprendizaje significativo de la definición de derivada de funciones de una variable. *ReHuSo*, 7(3), 112 - 125. doi: <https://doi.org/10.33936/rehuso.v7i3.5157>
- Martínez-Miraval, Mihály A., García-Cuéllar, Daysi J., & Poveda, William E. (2024). Exploring problem solving strategies in integral calculus with GeoGebra: a collaborative approach. *Formación universitaria*, 17(2), 161-172. doi: <https://dx.doi.org/10.4067/s0718-50062024000200161>
- Patiño Delgado, J. W. (2021). Estrategia pedagógica mediada por GeoGebra para el aprendizaje del pensamiento geométrico (Tesis doctoral, Corporación Universidad de la Costa). Obtenido de <https://acortar.link/TzOPqd>
- Proenza Garrido, Y., & Leyva Leyva, L. M. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana De Educación*, 48(1), 1-7. Obtenido de <https://doi.org/10.35362/rie4812249>
- Ramos, C. (2015). Estrategia didáctica basada en el modelo Van Hiele para lograr competencias

matemáticas en geometría (Tesis de maestría, Universidad San Ignacio de Loyola, Lima]. Obtenido de <https://acortar.link/RzJIu6>

Sarrín, M (2017). *Aplicación de un módulo de aprendizaje basado en el modelo de Van Hiele para el desarrollo del pensamiento y el logro de aprendizaje de transformaciones geométricas, en estudiantes de la IE Fernando Belaunde Terry de Ate* (Tesis de Doctorado) Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima. Obtenido de <https://hdl.handle.net/20.500.12672/7410>

Trigueros, María y Sánchez-Matamoros, Gloria (2022). El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Universidad. AIEM – Avances de investigación en educación matemática, 21, 1-5. doi: <https://doi.org/10.35763/aiem21.4445>