Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015

Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A PARTIR DE LAS PROPIEDADES DEL TRINOMIO CUADRÁTICO

THE SOLUTION OF PROBLEMS OF OPTIMIZATION FROM THE PROPERTIES OF THE QUADRATIC TRINOMY

Autores: Ángel Lorenzo Gómez Argüelles
Juan Antonio Martín Alfonso
Leandro Eusebio Hall Aguilar
Institución: Universidad de Ciego de Ávila Máximo Gómez Báez
Correo electrónico: jamartin@unica.cu

RESUMEN

El presente trabajo se refiere a la solución de problemas de optimización a partir de las propiedades del trinomio cuadrático, sin el empleo del Cálculo Diferencial, y a través de ejemplos se ilustra la existencia de una gran variedad de estos problemas que pueden ser resueltos usando este recurso. A criterio de los autores esta tipología de problemas puede ser utilizada en cursos precedentes al estudio del Cálculo Diferencial, con el objetivo acercar a los estudiantes a la modelación de problemas de optimización**.** Estos problemas permiten trabajar en la formación general de los estudiantes.

Palabras clave: Problemas, Optimización, Matemática, Educación Medioambiental, Cultura Económica.

ABSTRACT

This paper refers to solving optimization problems from the properties of the quadratic trinomial, without the use of Differential Calculus, and through examples is illustrated the existence of a wide variety of these problems, that can be solved using this resource. In the opinion of the authors this type of problems can be used in previous courses to study of Differential Calculus, in order to bring the students to the modeling of optimization problems. These problems allow working in the general education of students.

Keywords: Problems, Optimization, Mathematics, Environmental Education, Economic Culture.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad en las universidades cubanas se plantea una tarea de primordial importancia que es la formación de un profesional que responda a las exigencias de la sociedad. Un elemento importante en la formación de estos profesionales es el dominio de un sistema de referencias matemáticas, de métodos y procedimientos y poder utilizar los modelos matemáticos adecuados.

Son muchos los que han insistido, en diferentes épocas, en que hacer matemáticas es por excelencia resolver problemas, asunto este que debe cumplir con las etapas sugeridas por George Polya que distinguen el proceso de resolución de problemas reveladas en Ballester et al (1992). Este concepto es comprendido en la teoría de la enseñanza como una situación inherente a un objeto que induce una necesidad en un sujeto que se relaciona con dicho objeto, y que sirve como punto de partida. Se considera que el problema es ese punto de partida para que en su solución el alumno aprenda a dominar la habilidad y se apropie del conocimiento (Rebollar, A., 1997). Compartimos la definición dada por Arnaiz, I. y García J. A. (2014) al señalar que «Resolver problemas matemáticos es una Habilidad Matemática Generalizada que consiste en un proceso de búsqueda de procedimientos desconocidos para de una situación inicial conocida llegar a una situación final desconocida».

Es muy vasta la cantidad de problemas que existen, así como la diversidad de sus clasificaciones, según los intereses de los programas o temas específicos que encierren determinados sistemas de conocimientos que los profesores quisieran explotar por la vía de los problemas. Todo problema en su proceso de solución lleva implícito un modelo matemático y en las etapas de solución por las que atraviesa el problema la más difícil de todas es la búsqueda de ese modelo matemático.

En todo intento por resolver un problema deben estar presente los conocimientos previos necesarios que debe poseer el alumno para lograr su propósito, en el

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015
Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

presente trabajo consisten en el dominio de las propiedades elementales del trinomio de segundo grado, y en particular la búsqueda de los valores máximos y mínimos del trinomio. Elementos que no se aprovechan en los cursos de matemática básica, ya sea en cursos introductorios en las carreras universitarias o en la enseñanza de la matemática escolar y se reservan equivocadamente los problemas de optimización para el uso de la potente herramienta del Cálculo Diferencial; haciéndose en estos cursos previos a las matemáticas superiores un abuso de la tipología de problemas que conducen a una ecuación lineal o a sistemas de ecuaciones lineales; lo que se evidencia al revisar los Exámenes de Ingreso a la Educación Superior de los 10 últimos cursos.

De esta forma se desaprovechan potencialidades del trabajo con los problemas para el desarrollo del pensamiento de los alumnos, a la contribución de una formación económica basada en la optimización de recursos, en el cuidado del entorno, entre otras cuestiones. Los problemas de optimización, en sus diferentes variantes, pueden ser abordados en todos los grados de la educación básica, como se ejemplifican en los trabajos de Malaspina (2008 y 2011).

En matemáticas, estadísticas, ciencias empíricas, ciencia de la computación, o economía, optimización matemática es la selección del mejor elemento (con respecto a algún criterio) de un conjunto de elementos disponibles (The Nature of Mathematical Programming). En el caso más simple un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función.

En el presente trabajo los autores pretenden ilustrar mediante ejemplos las potencialidades del trinomio de segundo grado para modelar problemas de optimización, lo que pone al estudiante en condiciones de éxito para enfrentar este tipo de problemas al estudiar el Cálculo Deferencial en una o varias variables.

DESARROLLO

La habilidad de modelar (y acciones asociadas) tienen en los momentos actuales una gran importancia, ya que ella debe ser rectora en la formación matemática del profesional moderno, como profesional creador, demanda que está condicionada

Universidad&Ciencia Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
Pág. 15-30 ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14 http://revistas.unica.cu/uciencia
Publicado 30/4/2015

fundamentalmente por el desarrollo de la ciencia y la técnica. Esta habilidad se hará corresponder con las siguientes acciones:

- Identificar el modelo matemático adecuado.
- Identificar el método matemático (analítico o numérico), y con él dar solución al problema.
- Utilizar los métodos matemáticos cualitativos de investigación.
- En base al análisis ejecutado, interpretar los resultados y elaborar las recomendaciones.

Acciones que se logran si se ejecutan adecuadamente lo señalado por Arnaiz y García (2014) para la Habilidad Matemática Generalizada: resolver problemas matemáticos.

Las condiciones previas para el trabajo con problemas de optimización a partir del trinomio cuadrado las podemos encontrar en el texto de noveno grado (Muños, F., 1991) en problemas como el siguiente: Una pelota es lanzada hacia arriba, denotemos por h la altura y por t el tiempo transcurrido a partir del instante que se lanza. La dependencia de h en función del tiempo t se expresa mediante la fórmula
$h = 24t – 4{,}9\ t^2$, sin tener en cuenta el viento.

a) ¿Cuál es la mayor altura (en metros) que alcanza la pelota?
b) ¿En qué intervalo de tiempo (en segundos) la pelota asciende? ¿En qué intervalo desciende?
c) ¿Después de qué tiempo (en segundos) de lanzada la pelota llega a tierra?

Evidentemente se trata de un problema típico de extremo (inciso a), en que la esencia es determinar el vértice de la parábola $h = 24t – 4{,}9\ t^2$. Este problema tiene la característica de que el modelo matemático se da explícitamente. Para el trabajo que nos ocupa la búsqueda del modelo es un elemento fundamental dentro de los pasos de solución. Antes de pasar a mostrar ejemplos es necesario señalar cuáles son los pasos para la solución de tales problemas: búsqueda del modelo, determinación del extremo de la función, valoración de la solución y respuesta del problema. Estos pasos están en correspondencia con las acciones de la habilidad modelar dadas por Hernández, H. (1989).

Universidad&Ciencia Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
Pág. 15-30 ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14 http://revistas.unica.cu/uciencia
Publicado 30/4/2015

En el segundo paso es importante recordar que y = ax^2 + b x + c (a, b, c R, a tienen mínimo para a > 0 y máximo para a < 0, y dicho extremo se localiza en $x = \frac{-b}{2a}$.

Veamos a continuación algunos ejemplos resueltos ejemplos:

<u>Ejemplo 1</u>

Descomponer el número 40 en dos sumandos de forma tal que el producto de los mismos sea máximo.

Solución

El modelo es $p(x) = x(40 - x)$, que alcanza su valor máximo en x=20.

<u>Ejemplo 2</u>

A un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AB} = 10cm$ y altura sobre la base, $\overline{CD} = 20cm$ se le inscribe un rectángulo con dos de sus vértices en $\overline{AB}$. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

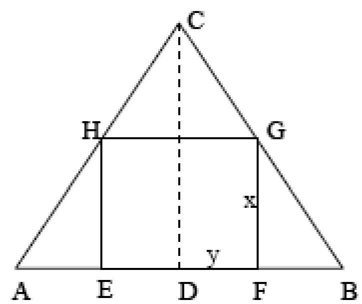


Fig. 1 Rectángulo inscrito en el triangulo isósceles.

Solución

En la figura 1 están recogidas las exigencias del problema. La función a maximizar es el área del rectángulo, a saber, $A = xy$ donde $\overline{EF} = y, \overline{EH} = x$ designan la base y la altura del rectángulo respectivamente. Observemos que ΔDBC $\sim$ ΔFBG, teniendo en cuenta las relaciones entre sus lados homólogos se obtiene: $20(5 - \frac{y}{2}) = 5x$. De donde resulta que $y = 10 - \frac{x}{2}$; finalmente obtenemos que $A(x) = x(10 - \frac{x}{2})$, que tiene un

Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015
Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

máximo en x = 10, usando la relación $y = 10 - \frac{x}{2}$ se obtiene que y = 5. El rectángulo de mayor área tiene la base de 5 cm y la altura de 10 cm.

Ejemplo 3

Dos rayos, entre los que el ángulo es igual a 60°, tienen origen común. Desde este, por uno de los rayos salió una partícula con una velocidad v y, pasada una hora, por el otro rayo, la segunda partícula a velocidad 3v. ¿A qué distancia mínima se aproximan las partículas después de la salida de la segunda de ella?

Solución

La figura 2 ilustra la situación. Hay que determinar el valor de **t** para el cual la distancia entre las dos partículas es mínima. De la ley de los cosenos resulta que $d^2(t) = v^2\left[7t^2 - 15t + 9\right]$, se tiene que $t_{min} = \frac{15}{14}$, de donde $d^2_{min} = \frac{27}{28}v^2$; y la distancia mínima a la que se aproximan las partículas es $d_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}v$.

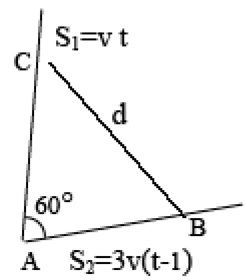


Fig. 2 Representación de los rayos.

Los problemas de optimización tienen gran potencialidad para realizar trabajo educativo con los estudiantes. En los siguientes ejemplos ilustraremos cómo con estos problemas que pueden ser resueltos usando las propiedades del trinomio cuadrado se puede trabajar la educación medioambiental y la formación de una cultura económica en estudiantes de enseña media y media superior y no hay que esperar que se apoderen de la potente herramienta del Cálculo Diferencial.

Ejemplo 4

Los cursos de dos ríos como muestra la figura 3 se pueden ajustar aproximadamente, en el tramo de interés, a una parábola de la forma y = x^2 y a la recta y = x – 2 según estudios topográficos realizado por un grupo de ingenieros. Los ríos están separados

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015
Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

por una región boscosa y se necesita unirlo por un canal recto para facilitar el regadío a zonas aledañas, pero el canal debe tener la menor longitud posible y provocar daños mínimos al entorno. ¿Cuáles deben ser las coordenadas en el terreno que garanticen una óptima longitud del canal?

Fig. 3: Representación pictórica de la unión de los dos causes de los ríos por un canal.

Solución

Para modelar matemáticamente el problema se ha utilizado la escala en cm E = 1:125000. El problema ahora se reduce a determinar la menor distancia entre la recta y = x – 2 y la parábola $y = x^2$, como muestra la figura 4 de análisis, dada en cm. Para modelar el problema podemos utilizar la fórmula de la distancia de un punto (x_0, y_0) a una recta ax + by + c = 0, la que está dada por $D = \frac{|ax_0 + y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, se obtiene que $D = \frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{2}}$ e imponiendo la condición de que el punto esté sobre la parábola resulta

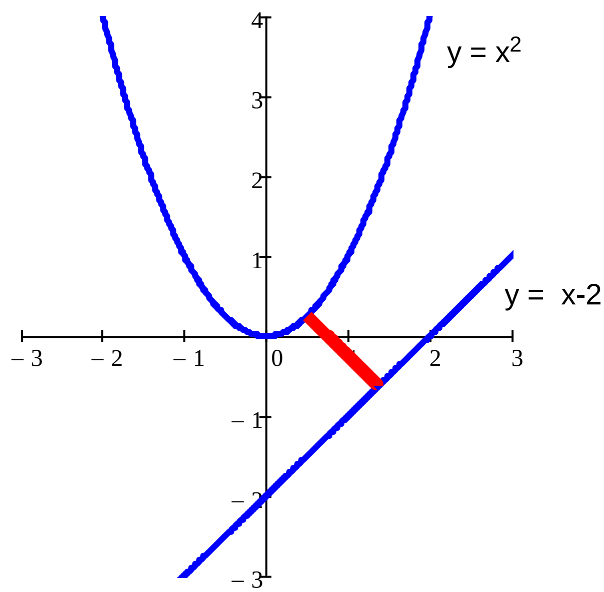


Fig. 4 Representación esquemática de la unión de los dos ríos por un canal.

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015

Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

$D = \frac{\left| x_0 - x_0^2 - 2 \right|}{\sqrt{2}}$. Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto resulta que $D_1 = \frac{x_0 - x_0^2 - 2}{\sqrt{2}}$ ó $D_2 = -\frac{x_0 - x_0^2 - 2}{\sqrt{2}}$, es decir $D_2 = \frac{x_0^2 - x_0 + 2}{\sqrt{2}}$. Evidentemente D_2 es el modelo que describe nuestra problemática, está claro que el mínimo para D_2 se alcanza para $x_0 = \frac{1}{2}$ y sustituyendo en la ecuación de la parábola que modela uno de los ríos se obtiene $y_0 = \frac{1}{4}$. Debemos encontrar el punto en la recta, que modela al otro rio, y hace mínima la distancia. Realizando los cálculos correspondiente se llega a $x_1 = \frac{11}{8}$ e $y_1 = -\frac{5}{8}$; luego la longitud del segmento es de 1.237 cm y haciendo uso de la escala el canal debe tener una longitud de 1.546 km. Al evaluar este resultado se obtiene que dicho canal de longitud mínima atraviesa la zona boscosa, por lo que para su construcción se hace necesario dañar significativamente el entorno. Es por eso que se debe construir el canal por una zona próxima con un incremento no muy grande de la longitud pero que afecte menos al entorno y así se contribuya al desarrollo sostenible. Este ejercicio se presta para sostener un debate con los alumnos donde se evalué la importancia del cuidado de las regiones boscosas las que forman parte de los pulmones de nuestro planeta y cuyo deterioro está teniendo una marcada incidencia en el cambio climático.

El supuesto de la maximización de los beneficios se utiliza frecuentemente en microeconomía porque predice la conducta de las empresas con un grado razonable de precisión y evita complicaciones analíticas innecesarias (Pindyck, R. S. y Rubinteld, D. L, 2013). Para esto es importante conocer que la curva de beneficios o ganancia viene dada por G(x) = I(x) – C(x), donde I representa el ingreso y C los costos; el ingreso se obtiene por la expresión I(x) = x P(x), siendo P el precio del producto.

Ejemplo 5

Universidad&Ciencia Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
Pág. 15-30 ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14 http://revistas.unica.cu/uciencia
Publicado 30/4/2015

Si las curvas de demandas y costo total de una empresa son $p(x)=75-2x$ $C(x)=350+12x+\frac{1}{4}x^2$, calcule los beneficios máximos y el precio correspondiente.

Solución

Sustituyendo en la expresión de beneficios resulta que $G(x)=(75-2x)x-(350+12x+\frac{1}{4}x^2)$, de donde $G(x)=-\frac{9}{2}x^2+63x-350$ curve que corresponde a una parábola que abre hacia abajo y por lo tanto su máximo se alcanza en $x_v=\dfrac{-63}{2(-\frac{9}{2})}=14$ y su valor $G_{\max}=91$ unidades monetarias. El precio del producto es $p(14)=47$ unidades monetarias.

<u>Ejemplo 6</u>

Un vendedor de flores ha observado que si vende la docena de flores a $15.00, es capaz de vender 100 docenas diarias, pero que por cada peso que aumente el precio, disminuye en 5 unidades la venta diaria de docenas de flores. Por otra parte a él le cuesta $7.5 la docena. Averiguar qué precio ha de poner a cada docena para obtener el máximo beneficio.

Solución

Sea *x* el precio de cada docena de flores. El número de docenas vendidas al día es n= 100- 5x, y en cada docena obtiene un beneficio igual *x*-7.5. Luego el beneficio total es

B (x) = (100- 5x)(x-7.5) = $-5x^2+137.5x-750.0$

Como se observa esta parábola alcanza su máximo para x = 13.75. Luego el vendedor deberá vender a $13.75 la docena y obtendrá un beneficio máximo de $195.30

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015
Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

Estos problemas y similares permiten contribuir a la formación del pensamiento económico de los estudiantes y ponerlo en condiciones de evaluar los impactos de las políticas de precios.

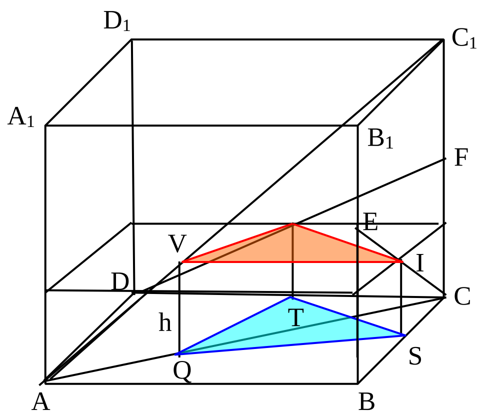
Existen ejemplos de un alto grado de complejidad, a pesar de que el proceso de determinación del extremo de la parábola que modela el problema es un cálculo rutinario, la complejidad de tales problemas está dada por lo extremadamente difícil que se hace la obtención de dicha función. Estos ejercicios tienen grandes potencialidades para el trabajo de los alumnos de alto rendimiento. Un ejemplo que ilustra esto es el siguiente ejerció propuesto del texto Problemas de Análisis Matemático de Kudriávtsev.

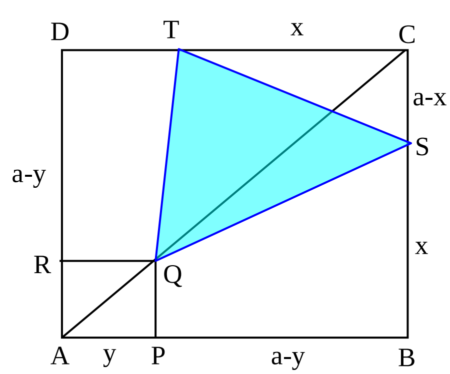
Ejemplo 7

La longitud de la arista del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es igual a **a**. E y F son los puntos medios de las aristas BB_1 y CC_1, respectivamente. Los vértices de un triángulo son los puntos de intersección de un plano paralelo a la base del cubo con las rectas AC_1, CE y DF. Halle el valor mínimo del área de semejante triángulo.

Solución

En la figura 5 a) se representa la situación señalada en el problema y la proyección del triángulo, sobre la base del cubo, al que hay que minimizarle el área, figura 5 b).





a)

b)

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015
Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

Fig. 5 Representación del triángulo dentro del cubo a) y su proyección sobre la basa de dicho cubo b).

Teniendo en cuenta que el triángulo objeto de análisis está en un plano paralelo a la base del cubo podemos garantizar que tiene la misma área que su proyección sobre la base y que por lo tanto el problema se reduce al trabajo con el triángulo de la proyección. Evidentemente el área de dicho triángulo depende de la altura del plano sobre la base del cubo por lo que al problema se le da solución al escribir el área de ΔQST como función de la altura h del plano paralelo a la base. De las condiciones impuestas en el problema se obtiene que $\overline{BS} = \overline{TC}\ y\ \overline{RQ} = \overline{QP}$, denotaremos estas longitudes por x e y respectivamente. Escribamos x e y en función de h. Teniendo en cuenta Δ BCE $\sim \Delta$ SCI obtenemos: $x = a - 2h$. De igual manera Δ $ACC_1 \sim \Delta$ AQV de donde se deduce que y = h. Luego

$$A_{\Delta QST} = a^2 - y^2 - \frac{x(a-x)}{2} - \frac{(x+y)(a-y)}{2} - \frac{(y+a-x)(a-y)}{2}$$

y sustituyendo las relaciones anteriores se obtiene el área del ΔQST en función de la altura h

$A(h) = 2h^2 - \frac{3}{2}ah + \frac{a^2}{2}$, resulta $h_{min} = \frac{3}{8}a$, siendo $A_{min} = \frac{7}{32}a^2$.

Los 7 ejemplos anteriores ilustran claramente las posibilidades de resolver problemas de optimización a partir de las propiedades del trinomio de segundo grado, con aplicaciones en diferentes temáticas, las que permiten trabajar distintas aristas en la formación y trabajo educativo con los estudiantes.

Seguidamente proponemos algunos ejemplos más con las mismas características que los anteriores.

1. La sección transversal de un túnel está formada por un rectángulo con un semicírculo en su parte superior. Si el perímetro de la misma es de p metros calcular sus dimensiones para que el área de dicha sección sea máxima.

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015
Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

2. En un triángulo está inscrito un rectángulo de forma que uno de sus lados yace en uno de los lados del triángulo y dos vértices en otros dos. Halle el área máxima posible del rectángulo si la del triángulo es igual a S.

3. En una granja de cítricos hay plantados 32 árboles de naranja por hectáreas. La producción es de 700 naranjas por árbol y esta se reduce en 25 naranjas por cada árbol adicional plantado en la hectárea. ¿Cuál es el número de árboles a plantear por hectáreas con el fin de maximizar la producción?

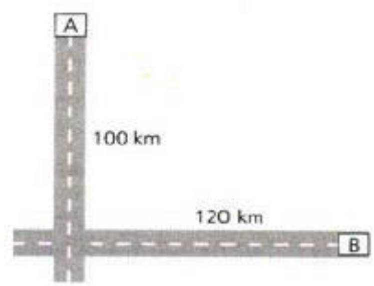
4. Halle el radio de la base y la altura de un cono circunscrito a una esfera si el volumen del cono tiene el valor mínimo de los posibles y el radio de la esfera es igual a R.

5. Un hilo de 100 cm se divide en dos trozos de longitudes *x* e *y*; con el primero se forma un cuadrado y con el segundo un círculo. Razonadamente:

a) Halla *x* e *y* para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima.

b) Halla x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

6. Un jardinero quiere hacer un cantero en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Se pregunta acerca del radio que debe tomar para lograr que el área del cantero sea máxima.



7. Dos coches circulan por dos carreteras perpendiculares. El primero sale de la ciudad A a 120 km/h y el segundo de la ciudad B a 100 km/h en sentido al cruce de ambas carreteras. La distancia de A hasta el cruce es de 100 km y desde B hasta el cruce, de 120 km. ¿En qué momento la distancia entre los dos coches es mínima?

8. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de *x* gramos y de 2 - *x* gramos, de forma que los dos rubíes formados sean de valor mínimo.

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015

Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

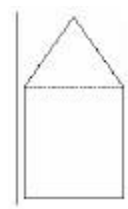
9. Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R(x), en euros, viene dada en función de la cantidad invertida, x en euros, por medio de la expresión: $R(x) = 0.001\ x^2 + 0.4\ x + 3.5$. Deducir qué cantidad de dinero convendrá invertir en dicho plan. ¿Qué rentabilidad se obtuvo en el caso anterior?

10. Los costos de fabricación, C(x) en pesos, de cierta variedad de salchichas, dependen de la cantidad elaborada (x en kilos) de acuerdo con la siguiente expresión: $C(x) = 2x + 10$. El fabricante estima que el precio de venta en euros de cada kilogramo de salchichas viene dado por: $p(x) = 20 - \frac{3}{400}x$

    Obtener la función de ganancias

    ¿Qué cantidad de salchichas interesa producir para maximizar ganancias?

    Calcular en este caso, el precio de venta y la ganancia que se obtiene.



11. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6.6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima

12. Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 metros. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

13. La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90+15x-0.6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde 1 de enero de 1990 contado en años. ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono? ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que se alcanza en esa ciudad?

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015
Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

14. Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión: N (p) = 300 - 6 p. Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete.
¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros?
¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios?
¿Cuáles son esos ingresos máximos?

15. Todas las aristas del prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ tienen una longitud a. Los extremos del segmento paralelo al plano ABB_1A_1 yacen en las diagonales $\overline{BC_1}$ y $\overline{CA_1}$ de las caras laterales. Halle la longitud mínima de dicho segmento.

16. Las termonucleares tienen un peso significativo, a nivel mundial, en el proceso de la generación de energía eléctrica; pero acarrean un riesgo latente debido a los accidentes que pueden ocurrir y se caracterizan por liberar al medio producto radiactivo. Se han producido varios de estos accidentes que afectaron seriamente a seres humanos y al ambiente. El accidente nuclear de Chernobyl (Ucrania, 26 de abril de 1986) es el mayor ocurrido, seguido por el de Fukushima Dahiichi producto de un terremoto. Otro proceso que puede provocar afectaciones está relacionado con el almacenamiento de los desechos radiactivo del combustible nuclear y la transportación. El principio que sigue el almacenamiento de residuos es aislarlos del entorno humano, interponiendo entre ellos y los seres vivos un sistema de barreras que impida su retorno para siempre, o que minimice los riesgos a un valor prácticamente nulo en el caso de fuga, los combustibles gastados, procedentes de los reactores nucleares, se consideran como residuos de radiactividad alta. Por ello en muchas ocasiones se almacenan definitivamente en Almacenamientos Geológicos Profundos (AGP. El transporte de materiales radiactivos se realiza de acuerdo con el Reglamento de Transportes del Organismo Internacional de la Energía Atómica y con directivas europeas. Para garantizar la seguridad, se emplean contenedores diseñados para resistir cualquier eventualidad, medios de transporte dotados de diversos sistemas de seguridad y conductores altamente especializados.

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015

Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

Suponiendo que una central termonuclear está a una distancia de 30 km en línea recta a partir del extremo este de un una ciudad que en la dirección oeste-este tiene una extensión de 6 km, la región es bordeada en su parte norte por una zona montañosa cuyo borde sudeste se ajusta a la curva $y^2 = 4x$ con vértice a 2 km del extremo oeste de la ciudad, como se ha representado esquemáticamente en la figura 6. En dicha región montañosa se desea construir un Almacenamiento Geológico Profundo para los desechos radiactivos de la planta nuclear; así como un ferrocarril recto lo más corto posible que una la planta nuclear con el AGP y garantice un tiempo mínimo de transportación. ¿Hacia qué punto de la curva limítrofe de la región montañosa debe dirigirse dicho ferrocarril? Valore ambientalmente la solución obtenida.

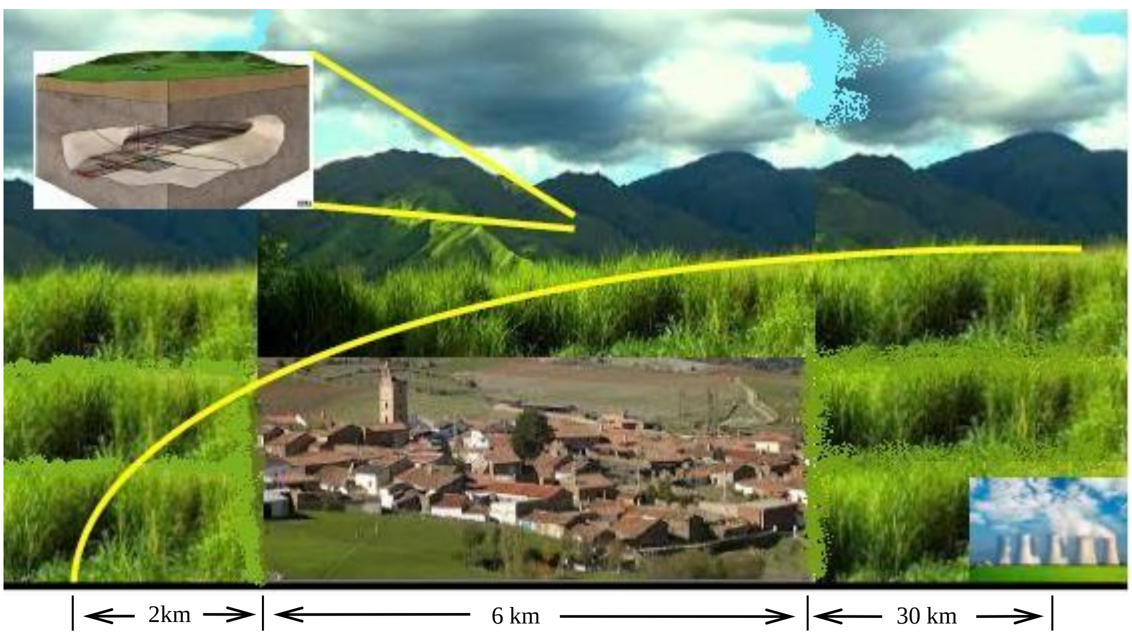


Fig. 6 Representación pictórica de los elementos que intervienen en el problema.

CONCLUSIONES

Existe una variedad de problemas de extremos que pueden ser resueltos a partir de las propiedades del trinomio de segundo grado, cuestión que prepara las condiciones para el ulterior desarrollo de la temática dentro del estudio de las aplicaciones del

Universidad&Ciencia
Pág. 15-30
Recibido: 06/09/14 Aceptado: 08/12/14
Publicado 30/4/2015

Vol. 4, No. 2, abril-julio (2015)
ISSN: 2227-2690 RNPS: 2450
http://revistas.unica.cu/uciencia

Cálculo Diferencial. Esta tipología de problemas permite trabajar en la formación general de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

ARNAIZ, I. Y GARCÍA, J. A.: «El desarrollo de habilidades matemáticas generalizadas». Las habilidades «resolver problemas matemáticos y demostrar proposiciones matemáticas», en *Educación y Sociedad*, Vol. 12 No. 4, 2014.

BALLESTER, S. Y *ET AL.*: *Metodología de la enseñanza de la Matemática*, t. 1, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, 1992.

HERNÁNDEZ, H.: *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior Cubana*, La Habana, Cuba, 1989.

KUDRIÁVTSEV, L.D.: *Problemas de Análisis Matemático*, Ed. Mir. Moscú, pp. 639, 1989.

MALASPINA, U.V.: *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización*, Tesis para optar por el grado de Doctor en Ciencias, Lima, Perú, enero de 2008.

MALASPINA, U.V.: *Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica*, Trabajo correspondiente a una conferencia dictada en la XIII CLAEN, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 7, Número 10. pp. 165-181, Costa Rica, 2012.

PINDYCK, R.S. Y RUBINTELD, D. L.: *Microeconomía*, Séptima Edición, Edit. Pearson Prentice Hall, 2013.

MUÑOZ, F. Y *ET AL.*: *Matemática noveno grado*, Ed. Pueblo y Educación, pp.286, La Habana, Cuba, 1991.

REBOLLAR, A.: *Tratamiento de problemas Matemáticos* (Folleto), pp. 25, Santiago de Cuba, 1997.

THE NATURE OF MATHEMATICAL PROGRAMMING: *Mathematical Programming Glossary, INFORMS Computing Society*. Disponible en http://glossary.computing.society.informs.org . Visitado el 15 de enero de 2014.